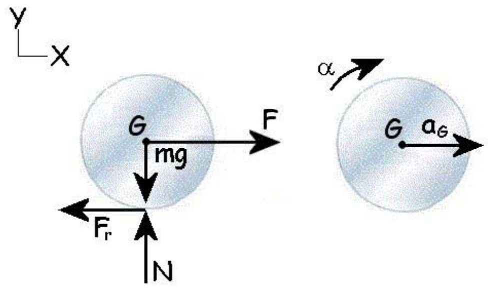
a) Suponemos inicialmente que el disco rueda sin deslizar. Esto implica dos condiciones, en primer lugar que la fuerza de rozamiento es inferior a la máxima (cosa que habrá que comprobar posteriormente) y que la aceleración del centro geométrico del disco, que en este caso coincide con el centro de masas, es el producto de la aceleración angular por el radio, es decir:

$$F_r<(F_r)_{máx} \Rightarrow F_r<\mu_e N$$

$$\mathbf{a_G}=\alpha r\mathbf{i}$$



Ahora hacemos los diagramas de sólido libre del sistema. En cuanto a fuerzas tendremos el peso, la fuerza externa F y la reacción del suelo, formada por la normal y la fuerza de rozamiento. Y en cuanto a aceleraciones la lineal del centro de masas y la angular, que tendrá sentido horario. Aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_X=ma_{GX} \Rightarrow F-F_r=ma_G \Rightarrow 90-F_r=50a_G$$

$$\Sigma F_Y=ma_{GY} \Rightarrow N-mg=0 \Rightarrow N=mg=50 \cdot 9.8=490 \text{ N}$$

$$\Sigma M_G=I_G\alpha \Rightarrow F_r r=\frac{1}{2}mr^2\alpha \Rightarrow F_r=\frac{1}{2}mr\alpha \Rightarrow F_r=\frac{1}{2}50\cdot 0.5\alpha \Rightarrow F_r=12.5\alpha$$

Y además sabemos que puesto que el disco rueda sin deslizar:

$$a_G=\alpha r=0.5\alpha$$

Tenemos pues un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$90-F_r=50a_G$$
$$F_r=12.5\alpha$$
$$a_G=0.5\alpha$$

Sustituimos la segunda y la tercera en la primera:

$$90-F_r=50a_G \Rightarrow 90-12.5\alpha=50 \cdot 0.5\alpha \Rightarrow \alpha=2.4 \text{ rad/s}^2$$

La fuerza de rozamiento entonces vale:

$$F_r=12.5\alpha=12.5 \cdot 2.4=30 \text{ N}$$

Comprobamos que efectivamente el disco rueda sin deslizar, es decir, que la fuerza de rozamiento es inferior al valor máximo:

$$F_r<\mu_e N \Rightarrow 30<0.30 \cdot 490 \Rightarrow 30<147$$

Como podemos ver, la fuerza de rozamiento es inferior al valor máximo y por tanto el disco rueda sin deslizar. La aceleración del centro de masas del disco es:

$$a_G=0.5\alpha=0.5 \cdot 2.4=1.2 \text{ m/s}^2$$

$$\underline{a_G=1.2 \text{ m/s}^2}$$

b) El máximo valor de la fuerza F que podemos aplicar para que el disco ruede sin deslizar es el que hace que la fuerza de rozamiento sea justo la fuerza de rozamiento máxima, es decir:

$$F_r=(F_r)_{máx}=\mu_e N=0.30 \cdot 490=147 \text{ N}$$

Pero puesto que el disco en este instante rueda sin deslizar la aceleración del centro de masas será:

$$a_G=\alpha r=0.5\alpha$$

El diagrama de sólido libre no varía, así como tampoco varían las ecuaciones, salvo estos dos valores. Así pues nos quedarán:

$$\Sigma F_X=ma_{GX} \Rightarrow F-F_r=ma_G \Rightarrow F-147=50a_G$$

$$\Sigma M_G=I_G\alpha \Rightarrow F_r r=\frac{1}{2}mr^2\alpha \Rightarrow F_r=\frac{1}{2}mr\alpha \Rightarrow 147=\frac{1}{2}50\cdot 0.5\alpha \Rightarrow \alpha=11.76 \text{ rad/s}^2$$

$$a_G=0.5\alpha=0.5 \cdot 11.76=5.88 \text{ m/s}^2$$

$$F-147=50a_G \Rightarrow F=147+50a_G=147+50 \cdot 5.88=441 \text{ N}$$

$$\underline{F=441 \text{ N}}$$

c) Si la fuerza F es de 500 N sabemos ya que el disco rueda y desliza simultáneamente, y además no es el valor crítico, luego la fuerza de rozamiento toma su valor máximo pero el cinético:

$$F_r=(F_r)_{máx}=\mu_c N=0.25 \cdot 490=122.5 \text{ N}$$

Las ecuaciones son las mismas que en el apartado anterior salvo este valor de la fuerza de rozamiento y que a_G y α son ahora completamente independientes. Tenemos entonces las ecuaciones:

$$\Sigma F_X=ma_{GX} \Rightarrow F-F_r=ma_G \Rightarrow 500-122.5=50a_G \Rightarrow a_G=7.55 \text{ m/s}^2$$

$$\underline{a_G=7.55 \text{ m/s}^2}$$

$$\Sigma M_G=I_G\alpha \Rightarrow F_r r=\frac{1}{2}mr^2\alpha \Rightarrow F_r=\frac{1}{2}mr\alpha \Rightarrow 122.5=\frac{1}{2}50\cdot 0.5\alpha \Rightarrow \alpha=9.8 \text{ rad/s}^2$$

$$\underline{\alpha=9.8 \text{ rad/s}^2}$$