a) En primer lugar vamos a determinar el ángulo θ que forma la fuerza P con la horizontal, y que será:

$$tg\theta = \frac{5}{12} \Rightarrow \theta = 22.62^{o}$$

Y la masa de la rueda será:

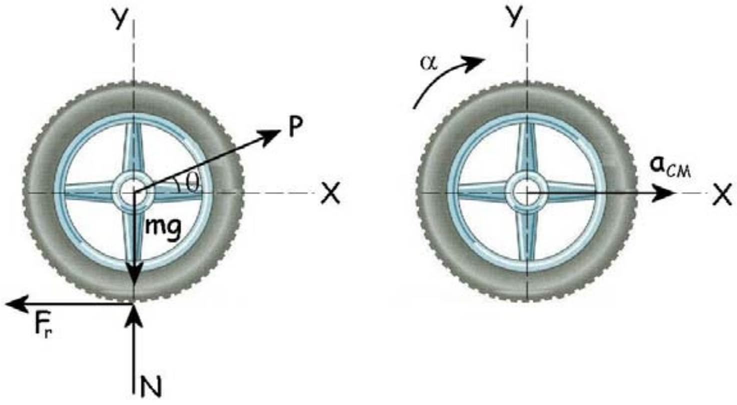
$$mg=375\ N \Rightarrow$$

$$m = \frac{375}{g} = \frac{375}{9.8} = 38.265\ kg$$

Llamamos R al radio de la rueda R=30 cm=0.3 m.

Ahora hacemos el diagrama de sólido libre de la rueda. En cuanto a fuerzas, está sometida a la fuerza P, a su peso y a la reacción del suelo, compuesta por la normal y la fuerza de rozamiento. En cuanto a aceleraciones, el centro de masas de la rueda coincide con su centro geométrico, de modo que por rodar sin deslizar se verifica que:

$$a_{CM}=a_{O}=\alpha R=0.3\alpha$$



Y tendremos que la aceleración angular α tendrá el mismo sentido que ω puesto que la rueda tiene que acelerar. Nos quedan los diagramas que aparecen en la figura. Aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\Sigma F_X=m(a_{CM})_X \Rightarrow P\cos\theta-F_r=ma_{CM} \Rightarrow 260\cos 22.62^{o}-F_r=38.265 \cdot 0.3\alpha \Rightarrow 240-F_r=11.48\alpha$$
$$\Sigma F_Y=m(a_M)_Y \Rightarrow P\,sen\theta+N-mg=0 \Rightarrow 260\,sen 22.62^{o}+N-375=0 \Rightarrow N=275\ N$$

$$\underline{N=275\ N}$$

$$\Sigma M_{CM}=I_{CM}\alpha \Rightarrow F_rR=mk^2\alpha \Rightarrow 0.3F_r=38.265 \cdot 0.231^2\alpha \Rightarrow F_r=6.80265\alpha$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$240-F_r=11.48\alpha$$
$$F_r=6.80265\alpha$$

Sustituyendo la segunda en la primera:

$$240-F_r=11.48\alpha \Rightarrow 240-6.80265\alpha=11.48\alpha \Rightarrow \alpha=13.13\ rad/s^2$$

$$\underline{\alpha=13.13\ rad/s^2}$$

Y la fuerza de rozamiento:

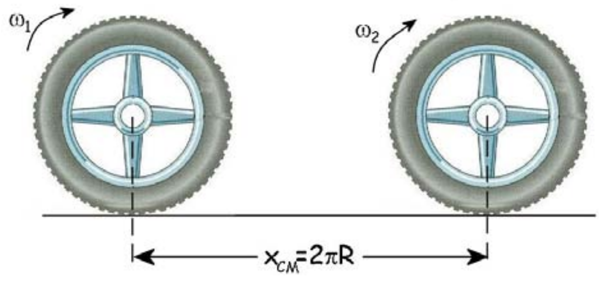
$$F_r=6.80265\alpha=6.80265 \cdot 13.13=89.28\ N$$

$$\underline{F_r=89.28\ N}$$

b) Para que el sistema ruede sin deslizar la fuerza de rozamiento tiene que ser inferior a su valor máximo, de modo que:

$$F_r \leq (F_r)_{máx} \Rightarrow F_r \leq \mu N \Rightarrow \mu \geq \frac{F_r}{N} \Rightarrow \mu \geq \frac{89.28}{275} \Rightarrow \mu \geq 0.32$$

$$\underline{\mu \geq 0.32}$$



c) Vamos a aplicar el teorema de conservación de la energía, entre la situación inicial, cuando la velocidad angular es ω_1=15 rad/s, y la final, cuando la velocidad angular es ω_2. Entre estas dos posiciones el centro de masas se ha desplazado una cantidad:

$$x_{CM}=2\pi R$$

Además, puesto que la rueda no desliza, la velocidad del centro de masas en cualquiera de las dos situaciones será:

$$v_{CM1}=\omega_1 R=0.3\omega_1$$
$$v_{CM2}=\omega_2 R=0.3\omega_2$$

Aplicando el teorema de conservación de la energía tendremos:

$$W=\Delta E_C$$

De las fuerzas que aparecen realizan trabajo la fuerza externa P y el peso. La normal no realiza trabajo por ser perpendicular al desplazamiento y la resistencia a la rodadura no disipa energía. Así pues nos queda:

$$W=\Delta E_C \Rightarrow W_P+W_{mg}=\Delta E_C \Rightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{x_{CM}}-\Delta E_{Pg}=\Delta E_C$$

El centro de masas no varía su altura, luego no hay variación de energía potencial gravitatoria:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x_{CM}}-\Delta E_{Pg}=\Delta E_C \Rightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{x_{CM}}=\Delta E_C \Rightarrow Px_{CM}\cos\theta=E_{C2}-E_{C1}$$

$$Px_{CM}\cos\theta=\frac{1}{2}mv_{CM2}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega_2^2-\frac{1}{2}mv_{CM1}^2-\frac{1}{2}I_{CM}\omega_1^2$$

$$P2\pi R\cos\theta=\frac{1}{2}m(0.3\omega_2)^2+\frac{1}{2}mk^2\omega_2^2-\frac{1}{2}m(0.3\omega_1)^2-\frac{1}{2}mk^2\omega_1^2$$

$$P2\pi R\cos\theta=\frac{1}{2}m\omega_2^2\left(0.3^2+k^2\right)-\frac{1}{2}m\omega_1^2\left(0.3^2+k^2\right)$$

$$260\cdot 2\pi\cdot 0.3\cos 22.62^\circ=\frac{1}{2}38.265\omega_2^2\left(0.3^2+0.231^2\right)-\frac{1}{2}28.265\cdot 15^2\left(0.3^2+0.231^2\right)$$

$$\underline{\omega_2=19.75 \text{ rad/s}}$$

Podríamos haber tenido en cuenta que puesto que las fuerzas son constantes, la aceleración del centro de masas también es constante y vale:

$$a_{CM}=0.3\alpha=0.3\cdot 13.13=3.94 \text{ m/s}^2$$

Tenemos la velocidad inicial del centro de masas:

$$v_{CM1}=0.3\omega_1=0.3\cdot 15=4.5 \text{ m/s}$$

Y el espacio recorrido:

$$x_{CM}=2\pi R=2\pi\cdot 0.3=1.885 \text{ m}$$

Aplicando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado tendremos:

$$x_{CM} = x_0 + v_{CM1}t + \frac{1}{2}a_{CM}t^2 \Rightarrow 1.885 = 4.5t + \frac{1}{2}3.94t^2 \Rightarrow 1.97t^2 + 4.5t - 1.885 = 0$$

$$t = \frac{-4.5 \pm \sqrt{4.5^2 + 4 \cdot 1.97 \cdot 1.885}}{2 \cdot 1.97} = \begin{cases} 0.361\,\text{s} \\ -2.65\,\text{s} \end{cases}$$

Obviamente la solución negativa es absurda. Ahora, de la ecuación de la velocidad:

$$v_{CM2}=v_{CM1}+at=4.5+3.94 \cdot 0.361=5.92\ \text{m/s}$$

Y puesto que la rueda no desliza:

$$v_{CM2}=0.3\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_{CM2}}{0.3} = \frac{5.92}{0.3} = 19.74\ \text{rad/s}$$

También podríamos haber tenido en cuenta que puesto que la aceleración angular es constante también es movimiento uniformemente acelerado en cuanto a la rotación, recorriéndose un ángulo de 2π radiantes, con lo que tendríamos:

$$\theta = \theta_0 + \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow 2\pi = 15t + \frac{1}{2}13.13t^2 \Rightarrow 6.565t^2 + 15t - 6.28 = 0$$

$$t = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 6.565 \cdot 6.28}}{2 \cdot 6.565} = \begin{cases} 0.361\,\text{s} \\ -2.65\,\text{s} \end{cases}$$

Y la velocidad angular:

$$\omega_2=\omega_1+\alpha t=15+13.13 \cdot 0.361=19.74\ \text{rad/s}$$

De cualquier forma obtenemos el mismo resultado.