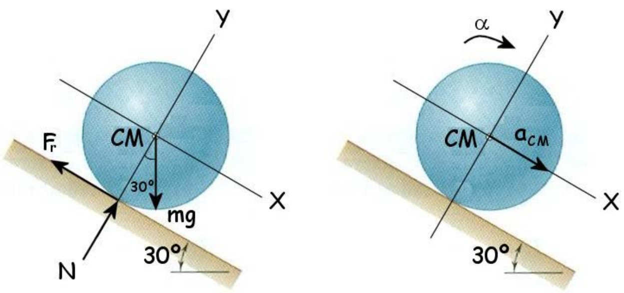


a) Tenemos que la esfera rueda sin deslizar, luego las condiciones son:

$$a_{CM}=\alpha r$$
$$F_r<\mu N$$

Así, si hacemos un diagrama de sólido libre de la esfera tendremos lo que aparece en la figura. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_X=ma_{CMX} \Rightarrow mgsen30º\text{-}F_r=ma_{CM} \Rightarrow mgsen30º\text{-}F_r=m\alpha r$$
$$\Sigma F_Y=ma_{CMY} \Rightarrow N\text{-}mgcos30º=0 \Rightarrow N=mgcos30º$$
$$\Sigma M_{CM}=I_{CM}\alpha \Rightarrow F_r r=\frac{2}{5}mr^2\alpha \Rightarrow F_r=\frac{2}{5}mr\alpha$$

De la primera ecuación:

$$mgsen30º\text{-}F_r=m\alpha r \Rightarrow F_r=mgsen30º\text{-}m\alpha r$$

Y sustituimos en la tercera:

$$F_r=\frac{2}{5}mr\alpha \Rightarrow mgsen30º-m\alpha r=\frac{2}{5}mr\alpha \Rightarrow gsen30º=\frac{7}{5}r\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{5gsen30º}{7r}$$

Y aplicamos la condición de rodadura:

$$F_r<\mu N \Rightarrow \frac{2}{5}mr\alpha<\mu mg\cos 30º \Rightarrow \frac{2}{5}r\frac{5gsen30º}{7r}<\mu g\cos 30º \Rightarrow \frac{2}{7}sen30º<\mu\cos 30º$$
$$\mu>\frac{2sen30º}{7\cos 30º} \Rightarrow \mu>\frac{2}{7}tg30º \Rightarrow \mu>0{,}165$$

Por tanto:

$$\underline{\mu_{mín}=0{,}165}$$

b) Como todas las fuerzas son constantes y el centro de masas se mueve sólo en el eje X, tenemos movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La aceleración del centro de masas será:

$$a_{CM}=\alpha r=\frac{5gsen30º}{7r}r=\frac{5gsen30º}{7}=\frac{5\cdot 9{,}8sen30º}{7}=3{,}5\ m/s^2$$

Por tanto, aplicando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_{CM}t^2 \Rightarrow 4=\frac{1}{2}3{,}5t^2 \Rightarrow t=1{,}512\ s$$
$$v_{CM}=v_0+a_{CM}t=3{,}5\cdot 1{,}512=5{,}29\ m/s$$

$$\underline{v_{CM}=5{,}29\ m/s}$$

También se puede hacer por conservación de la energía. Tendremos:

$$W_{if}=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}+W_N+W_{Fr}=\Delta E_C \Rightarrow \text{-}\Delta U=\Delta E_C \Rightarrow U_i\text{-}U_f=E_{Cf}\text{-}E_{Ci} \Rightarrow U_i=E_{Cfi}$$
$$mgh=\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Como rueda sin deslizar:

$$v_{CM}=\omega r \Rightarrow \omega=\frac{v_{CM}}{r}$$

Luego nos queda:

$$mgh=\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v_{CM}}{r}\right)^2 \Rightarrow gh=\frac{1}{2}v_{CM}^2+\frac{1}{5}v_{CM}^2$$

$$gxsen30^o=\frac{7}{10}v_{CM}^2 \Rightarrow v_{CM}=\sqrt{\frac{10gxsen30^o}{7}}=\sqrt{\frac{10\cdot 9{,}8\cdot 4sen30^o}{7}}=5{,}29\ m/s$$

Y obtenemos exactamente lo mismo.

c) Puesto que el coeficiente de rozamiento es de 0,1, está por debajo del mínimo para permitir la rodadura, luego la esfera desliza. Sin embargo, el gráfico con las fuerzas es el mismo. La fuerza de rozamiento vale:

$$F_r=\mu N=\mu mgcos30^o$$

Y aplicamos igualmente la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_X=ma_{CMX} \Rightarrow mgsen30^o-F_r=ma_{CM} \Rightarrow mgsen30^o-\mu mgcos30^o=ma_{CM}$$
$$a_{CM}=gsen30^o-\mu gcos30^o=9{,}8sen30^o-0{,}1\cdot 9{,}8cos30^o=4{,}05\ m/s^2$$

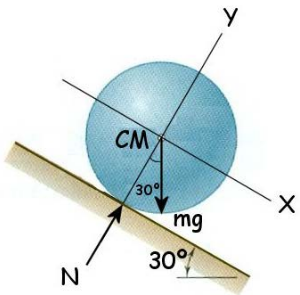
$$\underline{a_{CM}=4{,}05\ m/s^2}$$

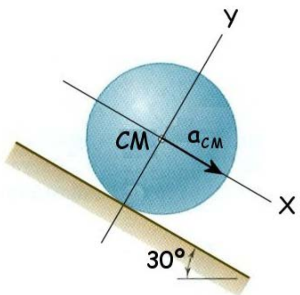
Y de la ecuación de momentos:

$$\Sigma M_{CM}=I_{CM}\alpha \Rightarrow F_r r=\frac{2}{5}mr^2\alpha \Rightarrow \mu mg\cos 30^o=\frac{2}{5}mr\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{5\mu g\cos 30^o}{2r}=$$
$$=\frac{5\cdot 0{,}1\cdot 9{,}8\cos 30^o}{2\cdot 0{,}20}=10{,}61\ rad/s^2$$

$$\underline{\alpha=10{,}61\ rad/s^2}$$

d) Si el plano es liso, no existe fuerza de rozamiento, y nos queda el diagrama que se muestra. Puede verse que no hay fuerzas que den momento respecto del centro de masas, y por tanto no puede haber aceleración angular. Tenemos por tanto una traslación pura con deslizamiento. A través de la segunda ley de Newton:





$$\Sigma F_X=ma_{CMX} \Rightarrow mgsen30^o=ma_{CM}$$
$$a_{CM}=gsen30^o=9{,}8sen30^o=4{,}9\ m/s^2$$

Y a través del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_{CM}t^2$$

$$4=\frac{1}{2}4{,}9t^2 \Rightarrow t=1{,}278\ s$$

$$v_{CM}=v_0+a_{CM}t=4{,}9\cdot 1{,}278=6{,}26\ m/s$$

$$\underline{v_{CM}=6{,}26\ m/s}$$

E igual que antes, podemos resolverlo también mediante el teorema de las fuerzas vivas:

$$W_{if}=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}+W_N=\Delta E_C \Rightarrow -\Delta U=\Delta E_C \Rightarrow U_i-U_f=E_{Cf}-E_{Ci} \Rightarrow U_i=E_{Cfi} \Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

$$gxsen30^o=\frac{1}{2}v_{CM}^2 \Rightarrow v_{CM}=\sqrt{2gxsen30^o}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 4sen30^o}=6{,}26\ m/s$$