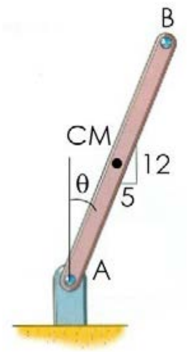


a) En primer lugar determinamos el ángulo θ que forma la barra con la vertical, que será:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{5}{12} \Rightarrow \theta = 22{,}620^{o}$$

Ahora, la velocidad del centro de masas es:

$$\mathbf{v_{CM}}=\mathbf{v_A}+\boldsymbol{\omega}\text{ x }\mathbf{r}=\boldsymbol{\omega}\text{ x }\mathbf{r}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ \frac{0{,}9}{2}\operatorname{sen}22{,}620^{o} & \frac{0{,}9}{2}\cos 22{,}620^{o} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=-2{,}492\mathbf{i}+1{,}038\mathbf{j}\text{ m/s}$$

En módulo:

$$v_{CM} = \sqrt{2{,}492^2 + 1{,}038^2} = 2{,}70\text{ m/s}$$

$$\underline{v_{CM}=2{,}70\text{ m/s}}$$

También se puede ver que el centro de masas efectúa un movimiento circular en torno a A y de radio 45 cm (la mitad de la longitud de la barra), de modo que su velocidad será:

$$v_{CM}=\omega R=6 \cdot 0{,}45=2{,}70\text{ m/s}$$

Obtenemos el mismo resultado.

b) Para esta parte nos hará falta la masa de la barra, que será:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{125}{9{,}8} = 12{,}755\text{ kg}$$

Y así, el momento de inercia:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}12{,}755 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}861\ \text{kgm}^2$$

Ahora hacemos el diagrama de sólido libre, para lo cual vamos a determinar primero la aceleración del centro de masas. Podemos operar de modo similar a como lo hemos hecho en el apartado a) pero en aceleraciones, y tendremos:

$$\mathbf{a_{CM}}=\mathbf{a_A}+\boldsymbol{\alpha}\text{ x }\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\text{ x }(\boldsymbol{\omega}\text{ x }\mathbf{r})=\boldsymbol{\alpha}\text{ x }\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\text{ x }(\boldsymbol{\omega}\text{ x }\mathbf{r})=$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\alpha \\ \frac{0{,}9}{2}\operatorname{sen}22{,}620^{o} & \frac{0{,}9}{2}\cos 22{,}620^{o} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ -2{,}492 & 1{,}038 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(0{,}415\alpha-6{,}228)\mathbf{i}-(0{,}173\alpha+14{,}952)\mathbf{j}$$

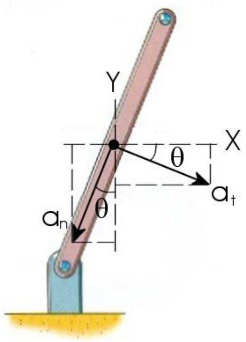
También podríamos haber tenido en cuenta que el centro de masas realiza un movimiento circular, de modo que tendrá dos componentes de aceleración, tangencial y normal. La componente normal es conocida, y será:

$$a_n = \frac{v_{CM}^2}{r} = \frac{2{,}70^2}{0{,}45} = 16{,}2\text{ m/s}^2$$

Y la componente tangencial:

$$a_t = \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha = 0{,}45\alpha$$

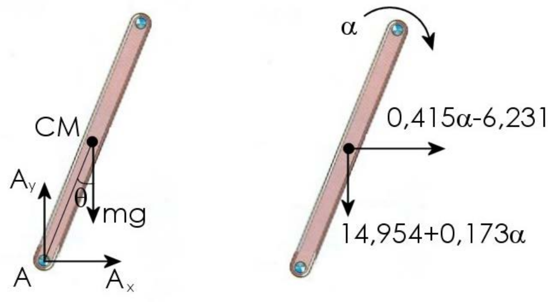
En cuanto a las direcciones de estas aceleraciones, la normal tiene la dirección del radio de curvatura y apunta hacia el centro de curvatura, y la tangencial es perpendicular a la normal, es decir, tiene dirección tangente a la trayectoria del centro de masas en ese momento, y sentido contrario a la velocidad, puesto que dicha velocidad está disminuyendo (el centro de masas asciende). Si las proyectamos en las direcciones X e Y tendremos:



$$a_{CM}=(a_t\cos\theta-a_n\text{sen}\theta)\mathbf{i}-(a_n\cos\theta+a_t\text{sen}\theta)\mathbf{j}=$$
$$=(0{,}45\alpha\cos 22{,}620^{o}-16{,}2\text{sen}22{,}620^{o})\mathbf{i}-$$
$$-(16{,}2\cos 22{,}620^{o}+0{,}45\alpha\text{sen}22{,}620^{o})\mathbf{j}=$$
$$=(0{,}415\alpha-6{,}231)\mathbf{i}-(14{,}954+0{,}173\alpha)\mathbf{j}$$

Vemos que se obtiene exactamente lo mismo.

Hacemos el diagrama de sólido libre de la barra y resolvemos. Las aceleraciones ya las tenemos. En cuanto a las fuerzas, la barra está sometida únicamente a su propio peso, aplicado en el centro de masas y vertical y hacia abajo, y a la reacción del pasador, que tendrá dos componentes, una horizontal y otra vertical. Así, tendremos lo que aparece en la figura.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_x=m(a_{CM})_x \Rightarrow A_x=m(0{,}415\alpha-6{,}231)$$
$$A_x=12{,}755(0{,}415\alpha-6{,}231)$$
$$A_x=5{,}293\alpha-79{,}477$$

$$\Sigma F_y=m(a_{CM})_y \Rightarrow A_y-mg=-m(14{,}954+0{,}173\alpha) \Rightarrow A_y-125=-12{,}755(14{,}954+0{,}173\alpha)$$
$$A_y-125=-190{,}738-2{,}207\alpha \Rightarrow A_y=-65{,}738-2{,}207\alpha$$

$$\Sigma M_{CM}=I_{CM}\alpha \Rightarrow -A_y\cdot 0{,}45\text{sen}\theta+A_x\cdot 0{,}45\cos\theta=-0{,}861\alpha$$
$$-A_y\cdot 0{,}45\text{sen}22{,}620^{o}+A_x\cdot 0{,}45\cos 22{,}620^{o}=-0{,}861\alpha \Rightarrow -0{,}173A_y+0{,}415A_x=-0{,}861\alpha$$

Y tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$A_x=5{,}293\alpha-79{,}477$$
$$A_y=-65{,}738-2{,}207\alpha$$
$$-0{,}173A_y+0{,}415A_x=-0{,}861\alpha$$

Sustituyo la primera y la segunda en la tercera:

$$-0{,}173A_y+0{,}415A_x=-0{,}861\alpha \Rightarrow -0{,}173(-65{,}738-2{,}207\alpha)+0{,}415(5{,}293\alpha-79{,}477)=-0{,}861\alpha$$

$$11,373+0,382\alpha+2,197\alpha-32,983=-0,861\alpha \Rightarrow \alpha=6,282\ rad/s^2$$

$$\underline{\alpha=6,282\ rad/s^2}$$

Y con esto las componentes de la reacción en A son inmediatas:

$$A_x=5,293\alpha-79,477=5,293\cdot 6,282-79,477=-46,23\ N$$

El signo solo significa que la reacción tiene sentido contrario:

$$\underline{A_x=46,23\ N}$$

$$A_y=-65,738-2,207\alpha=-65,738-2,207\cdot 6,282=-79,60\ N$$

El mismo comentario para el signo de esta componente:

$$\underline{A_y=79,60\ N}$$

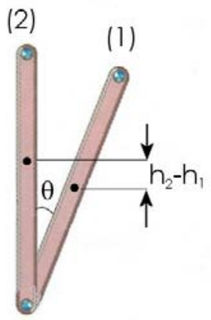
Puesto que la barra gira en torno a un punto fijo (A), podríamos haber determinado de forma más sencilla la aceleración angular de la misma tomando momentos respecto de A, en cuyo caso sólo daría momento el peso. El momento de inercia, no obstante, sería respecto de A, de modo que habría que aplicar el teorema de Steiner:

$$I_A=I_{CM}+md^2=0,861+12,755\cdot 0,45^2=3,444\ kgm^2$$

Y así tendríamos:

$$\Sigma M_A=I_A\alpha \Rightarrow -mg\cdot 0,45sen\theta=-I_A\alpha \Rightarrow 125\cdot 0,45sen22,620^o=3,444_A\alpha \Rightarrow \alpha=6,282\ rad/s^2$$

Puede verse que el resultado es el mismo.



c) Ahora aplicamos el teorema de las fuerzas vivas, entre la situación (1), que es la de partida, donde la barra tiene una velocidad angular de ω_1=6 rad/s, y la situación (2), al pasar por la vertical, donde la velocidad angular de la barra es ω_2 y la lineal del centro de masas:

$$v_{CM2}=0,45\omega_2$$

Tendremos entonces:

$$W_{12}=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}+W_A=\Delta E_C \Rightarrow -\Delta U=\Delta E_C \Rightarrow U_1-U_2=E_{C2}-E_{C1}$$

$$mg(h_1-h_2)=\frac{1}{2}mv_{CM2}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega_2^2-\frac{1}{2}mv_{CM1}^2-\frac{1}{2}I_{CM}\omega_1^2$$

$$-mg(0,45-0,45\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_{CM2}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega_2^2-\frac{1}{2}mv_{CM1}^2-\frac{1}{2}I_{CM}\omega_1^2$$

$$-12,755\cdot 9,8(0,45-0,45\cos 22,620^o)=$$

$$\frac{1}{2}12,755(0,45\omega_2)^2+\frac{1}{2}0,861\omega_2^2-\frac{1}{2}12,755\cdot 2,70^2-\frac{1}{2}0,861\cdot 6^2 \Rightarrow \omega_2=5,79\ rad/s$$

$$\underline{\omega_2=5,79\ rad/s}$$

También podríamos haberlo resuelto como una rotación pura en torno al punto A, de modo que sólo tendríamos energía cinética de rotación. Quedaría entonces:

$$W_{12}=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}+W_A=\Delta E_C \Rightarrow -\Delta U=\Delta E_C \Rightarrow U_1-U_2=E_{C2}-E_{C1}$$

$$mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_A \omega_1^2 \Rightarrow -mg(0,45 - 0,45\cos\theta) = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_A \omega_1^2$$

$$-12,755 \cdot 9,8(0,45 - 0,45\cos 22,620^o) = \frac{1}{2} 3,444\omega_2^2 - \frac{1}{2} 3,444 \cdot 6^2 \Rightarrow \omega_2 = 5,79 \text{ rad/s}$$