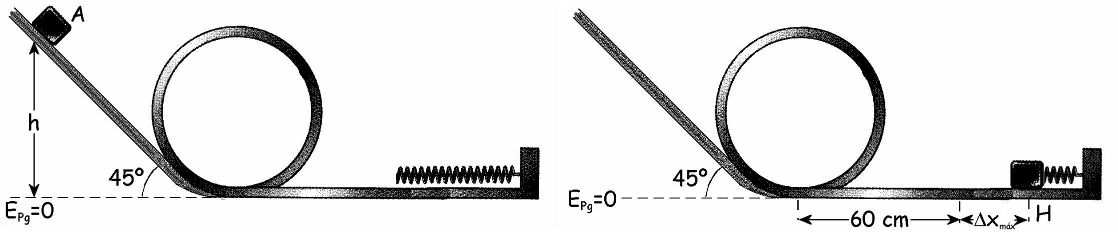
a) Podemos aplicar el teorema de conservación de la energía entre la posición inicial, cuando el bloque parte del reposo en la posición indicada, y la posición final, cuando el resorte tiene la máxima compresión. En la situación inicial (A) sólo tendremos energía potencial gravitatoria correspondiente a la altura h, mientras que al final (H) sólo tenemos energía potencial elástica, correspondiente a la compresión máxima del resorte $\Delta x_{máx}$. Nos quedará, por tanto:

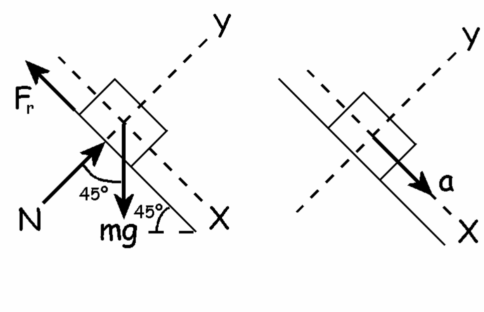


$$E_{TA}+W_{otras}=E_{TH}$$

En cuanto al trabajo realizado por las fuerzas, tendremos que la normal no realiza trabajo, ya que siempre es perpendicular al desplazamiento. Sólo realiza trabajo la fuerza de rozamiento, que será distinta en el tramo inclinado y en el tramo recto. En el tramo inclinado, si realizamos un diagrama de sólido libre tendremos:

$$\Sigma F_Y=0 \Rightarrow N-mg\cos 45°=0 \Rightarrow N=mg\cos 45°$$

$$F_r=(F_r)_{máx}=\mu N= =\mu mg\cos 45°=0.3 \cdot 0.6 \cdot 9.8\cos 45°= =1.247 \text{ N}$$



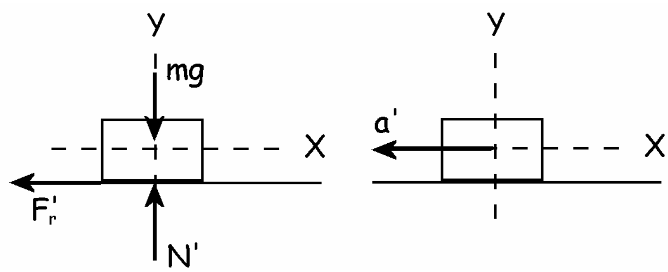
El desplazamiento de su punto de aplicación será la longitud del plano inclinado:

$$\text{sen}45° = \frac{h}{s}$$

$$s = \frac{h}{\text{sen}45°} = \frac{2.5}{\text{sen}45°} = 3.536 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta que la fuerza y el desplazamiento de su punto de aplicación forman un ángulo de 180° tendremos:

$$W_{Fr}=\mathbf{F_r} \cdot \mathbf{s}=F_r s\cos 180°=-F_r s=-1.247 \cdot 3.536=-4.41 \text{ J}$$



Ahora, en el tramo recto tendremos:

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow N'-mg=0 \Rightarrow N'=mg$$

$$F'_r=(F'_r)_{máx}=\mu N'=\mu mg=$$
$$=0.3 \cdot 0.6 \cdot 9.8=1.764 \text{ N}$$

Esta fuerza de rozamiento y el desplazamiento de su punto de aplicación forman un ángulo de 180°, y el desplazamiento del punto de aplicación será todo el tramo horizontal, es decir, los 60 cm más la compresión del resorte:

$$W_{F'r}=\mathbf{F'_r}\cdot\mathbf{s'}=F'_r s'\cos180^\circ=-F'_r s'=-1.764(0.6+\Delta x_{máx})=-1.0584-1.764\Delta x_{máx}$$

Así pues, tendremos:

$$E_{TA}+W_{otras}=E_{TH}\Rightarrow E_{PgA}+W_{Fr}+W_{F'r}=E_{PeH}$$

$$mgh-4.41-1.0584-1.764\Delta x_{máx}=\frac{1}{2}k\Delta x_{máx}^2$$

$$0.6\cdot9.8\cdot2.5-5.4954-1.764\Delta x_{máx}=\frac{1}{2}500\Delta x_{máx}^2$$

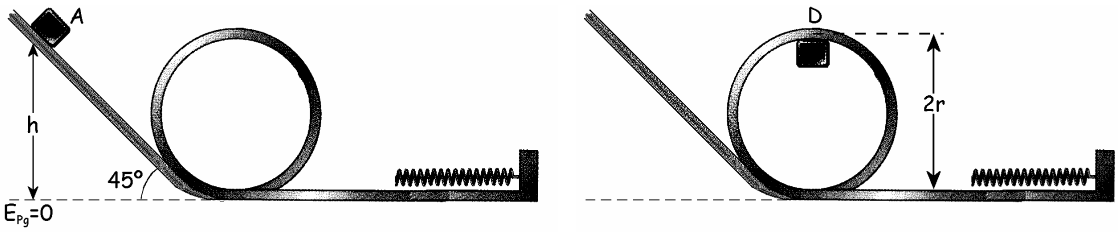
$$250\Delta x_{máx}^2+1.764\Delta x_{máx}-9.2046=0$$

$$\Delta x_{máx}=\frac{-1.764\pm\sqrt{1.764^2+4\cdot250\cdot9.2046}}{2\cdot250}=\begin{cases}0.1884\text{ m}\\-0.1954\text{ m}\end{cases}$$

Descartamos la solución negativa puesto que obtenemos así el módulo de la compresión.

$$\underline{\Delta x_{máx}=0.1884\text{ m}}$$

b) Para determinar la reacción en la posición D necesitamos la velocidad con que el bloque llega a dicho punto. Aplicamos para ello la conservación de la energía entre la posición inicial (A) y dicha posición (D). En A ya hemos determinado la energía. En D tendremos energía potencial gravitatoria, correspondiente a una altura de dos veces el radio de la

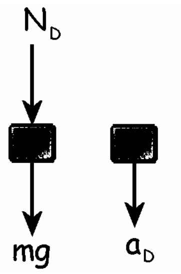


circunferencia, y energía cinética, ya que al punto D el bloque llega con una cierta velocidad. En cuanto al trabajo realizado por las fuerzas, sólo tendremos el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en el plano inclinado, que ya habíamos determinado. Así pues:

$$E_{TA}+W_{otras}=E_{TD}\Rightarrow E_{PgA}+W_{Fr}+W_{F'r}=E_{PgD}+E_{CD}$$

$$mgh+W_{Fr}=mg2r+\frac{1}{2}mv_D^2$$

$$0.6\cdot9.8\cdot2.5-4.41=0.6\cdot9.8\cdot2\cdot0.5+\frac{1}{2}0.6v_D^2\Rightarrow v_D^2=14.7\text{ m}^2/\text{s}^2$$



Ahora para llegar a la reacción en D tendremos que hacer el diagrama de sólido libre del bloque en dicha posición. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_Y = ma_D \Rightarrow N_D + mg = m\frac{v_D^2}{r} \Rightarrow N_D = m\frac{v_D^2}{r} - mg =$$

$$= 0.6\frac{14.7}{0.5} - 0.6 \cdot 9.8 = 11.76\ \text{N}$$

<u>N_D=11.76 N</u>

c) Nos dan el peso del cuerpo que se cuelga del resorte. Su masa entonces será:

$$P = mg \Rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{1000}{9.8} = 102.04\ \text{kg}$$

Tenemos que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad. Por tanto, la constante de amortiguamiento será:

$$F=\gamma v \Rightarrow F=2.5v \Rightarrow \gamma=2.5\ \text{Ns/m}$$

Y el parámetro de amortiguamiento:

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} = \frac{2.5}{2 \cdot 102.04} = 0.01225\ \text{s}^{-1}$$

Tendremos que comparar este valor con el de la frecuencia natural del oscilador (la que tendría si estuviera sin amortiguar):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500}{102.04}} = 2.214\ \text{rad/s}$$

Como $\beta \lll \omega_0$ el amortiguamiento es débil.

<u>AMORTIGUAMIENTO DÉBIL</u>

d) La ecuación del movimiento será:

$$y=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)=Ae^{-0.01225t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

La frecuencia de la oscilación valdrá:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{2.214^2 - 0.01225^2} = 2.214\ \text{rad/s}$$

Nos queda pues:

$$y=A_0e^{-0.01225t}\cos(\omega t+\varphi_0)=A_0e^{-0.01225t}\cos(2.214t+\varphi_0)$$

Nos dicen que el desfase inicial es nulo:

$$y=A_0e^{-0.01225t}\cos(2.214t+\varphi_0)=A_0e^{-0.01225t}\cos(2.214t)$$

Y ahora sabemos que en t=0 la posición es de 10 cm=0.1 m:

$$t=0 \Rightarrow y=0.1\ m \Rightarrow 0.1=A_0$$

Así pues nos queda:

$$y=A_0e^{-0.01225t}\cos(2.214t)=0.1e^{-0.01225t}\cos(2.214t)$$

$$\underline{y=0.1e^{-0.01225t}\cos(2.214t)}$$

e) Ahora tenemos una fuerza impulsora del tipo:

$$F=F_0\cos\omega t=25\cdot 10^4\cos\omega t$$

Así pues:

$$F_0=25\cdot 10^4\ \text{dinas}=2.5\ N$$

La amplitud de las oscilaciones en función de ω es:

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\frac{2.5}{102.04\sqrt{(2.214^2-\omega^2)^2+4\cdot 0.01225^2\omega^2}}=$$

$$=\frac{0.0245}{\sqrt{(4.9-\omega^2)^2+6\cdot 10^{-4}\omega^2}}$$

$$\underline{A=\frac{0.0245}{\sqrt{(4.9-\omega^2)^2+6\cdot 10^{-4}\omega^2}}}$$

La amplitud máxima será la correspondiente a la frecuencia de resonancia. Dicha frecuencia es:

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{2.214^2-2\cdot 0.01225^2}=2.214\ \text{rad/s}$$

Sustituyendo esto en la expresión de la amplitud:

$$A=\frac{0.0245}{\sqrt{(4.9-\omega^2)^2+6\cdot 10^{-4}\omega^2}}=\frac{0.0245}{\sqrt{(4.9-2.214^2)^2+6\cdot 10^{-4}\cdot 2.214^2}}=0.452\ m$$

$$\underline{A_R=0.452\ m}$$

También podemos sustituir directamente en la expresión que nos da la amplitud de la resonancia:

$$A_R = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2.5}{2 \cdot 0.01225 \cdot 102.04\sqrt{2.214^2 - 0.01225^2}} = 0.452\ \text{m}$$

$\underline{A_R = 0.452\ \text{m}}$