a) Para todo el problema llamaremos m_G a la masa de la nave Galileo y m_S a la de la nave Sócrates.

Como conocemos las velocidades en las dos órbitas circulares, podemos determinar los radios de dichas órbitas. Para una órbita circular la única fuerza que existe es la de atracción gravitatoria, y la única aceleración es la normal o centrípeta (ya que el movimiento es circular y uniforme). Así, como la fuerza y la aceleración tienen la misma dirección y sentido:

$$F_g = ma_c \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{GM}{v^2}$$

Para la nave Galileo:

$$r_G = \frac{GM}{v_G^2} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{7072.84^2} = 8000000 \text{ m} = 8000 \text{ km}$$

Y para la nave Sócrates:

$$r_s = \frac{GM}{v_s^2} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{7561.18^2} = 7000000 \text{ m} = 7000 \text{ km}$$

Así, el semieje mayor de la elipse de transición vale:

$$2a=r_A+r_P=r_G+r_S=7000+8000=15000 \text{ km} \Rightarrow a=7500 \text{ km}$$

Al llegar al punto A, inmediatamente antes del incremento de velocidad, la nave Galileo se encuentra en la primera órbita circular, luego su velocidad será:

$$v_A=v_G=7072.84 \text{ m/s}$$

Inmediatamente después del incremento de velocidad, la nueva velocidad de la nave será v'_A, y ésta se encontrará en el mismo punto pero en la elipse. En esta órbita se debe conservar la energía total, luego:

$$E_T = E_{TA} \Rightarrow E_T = E_{CA} + E_{PA} \Rightarrow -G\frac{Mm_G}{2a} = \frac{1}{2}m_G v'^2_A - G\frac{Mm_G}{r_A} \Rightarrow -G\frac{M}{2a} = \frac{1}{2}v'^2_A - G\frac{M}{r_A}$$

$$-6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{15000\cdot 10^3} = \frac{1}{2}v'^2_A - 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{8000\cdot 10^3} \Rightarrow v'_A = 6833.01 \text{ m/s}$$

Por tanto, el incremento de velocidad en el punto A es:

$$\Delta v_A=v'_A-v_A=6833.01-7072.84=-239.83 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_A=-239.83 \text{ m/s}$$

b) En el punto P justo antes del incremento de velocidad, la nave se encuentra en la órbita elíptica. En dicha órbita se conserva el momento angular luego:

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_P \Rightarrow m_G r_A v'_A \operatorname{sen}\varphi_A = m_G r_P v_P \operatorname{sen}\varphi_P$$

siendo φ_A y φ_P el ángulo que en cada punto forman el radio vector con la velocidad. En los puntos A y P el radio vector es perpendicular a la velocidad, luego:

$$\varphi_A=\varphi_P=90º \Rightarrow sen\varphi_A=sen\varphi_P=1$$

Entonces:

$$m_G r_A v'_A \, sen\varphi_A = m_G r_P v_P sen\varphi_P \Rightarrow r_A v'_A = r_P v_P \Rightarrow v_P = \frac{r_A v'_A}{r_P} = \frac{8000 \cdot 6833.01}{7000} = 7809.15 \text{ m/s}$$

Inmediatamente después del incremento de velocidad, la nave se encontrará en la segunda órbita circular, donde la velocidad es constante, luego:

$$v'_P=v_S=7561.18 \text{ m/s}$$

El incremento de velocidad en este punto entonces es:

$$\Delta v_P=v'_P-v_P=7561.18-7806.15=-247.97 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_P=-247.97 \text{ m/s}$$

c) La velocidad areolar en la primera órbita circular es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m_G} = \frac{r_G m_G v_G sen\varphi_G}{2m_G}$$

siendo φ_G el ángulo que forma la velocidad con el radio vector. En una órbita circular el radio vector y la velocidad son perpendiculares luego:

$$\varphi_G=90º \Rightarrow sen\varphi_G=1$$

Entonces:

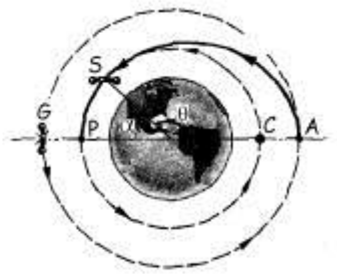
$$\frac{dA}{dt} = \frac{r_G m_G v_G sen\varphi_G}{2m_G} = \frac{r_G v_G}{2} = \frac{8000 \cdot 10^3 \cdot 7072.84}{2} = 2.829 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2.829 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}$$

d) Para la órbita de transición aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$T_E = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}} (7500 \cdot 10^3)^3} = 6451.09 \text{ s}$$

$$T_E=6451.09 \text{ s}$$



e) Para que las naves partan a la vez de los puntos G y S y lleguen a la vez al punto P de modo que se produzca el acoplamiento, lo que debe ocurrir es que en el mismo intervalo de tiempo la nave Galileo recorra media circunferencia grande y media elipse y la nave Sócrates el ángulo marcado en el gráfico como α. Podemos calcular en primer lugar el tiempo, ya que hemos dicho que la nave Galileo debe recorrer media circunferencia y media elipse, luego invertirá en cada recorrido la mitad de las órbitas respectivas; en el caso de la órbita elíptica conocemos el período, y en el de la circular aplicaremos la tercera ley de Kepler:

$$t = \frac{T_G}{2} + \frac{T_E}{2} = \frac{\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} r_G^3}}{2} + \frac{T_E}{2} = \frac{\sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}} (8000 \cdot 10^3)^3}}{2} + \frac{6451.09}{2} = 6778.96 \text{ s}$$

En cuanto a la nave Sócrates en ese tiempo recorre el ángulo α. Como para dicha nave el movimiento es circular y uniforme:

$$\omega_s = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega_s t = \frac{v_s}{r_s} t = \frac{7561.18}{7000 \cdot 10^3} 6778.96 = 7.32 \text{ rad} = 419.54^\circ = 59.54^\circ$$

Y el ángulo θ por tanto será:

$$\theta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 59.54^\circ = 120.46^\circ$$

$$\theta = 120.46^\circ$$