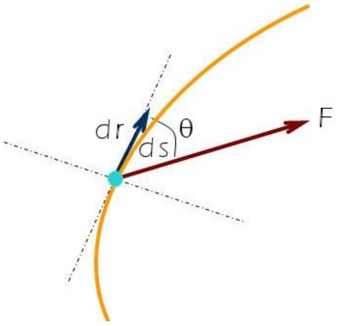
a) Consideremos una partícula P sobre la que actúa una fuerza **F**, función de la posición de la partícula en el espacio, esto es, **F**=**F**(**r**) y sea d**r** un desplazamiento infinitesimal experimentado por la partícula durante un intervalo de tiempo dt. Llamamos trabajo elemental, dW, de la fuerza **F** correspondiente al desplazamiento elemental d**r** al producto escalar de **F** por d**r**, esto es:

$$dW=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$



Bajo la acción de esa fuerza, o de ese conjunto de fuerzas, la partícula adquiere una aceleración tal que **F**=m**a**. Calculemos el trabajo realizado por la fuerza **F** en un desplazamiento de la partícula entre dos puntos A y B de la trayectoria. Tendremos:

$$W(A\rightarrow B)=\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_A^B m\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}=\int_A^B m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r}=$$
$$=m\int_A^B d\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=m\int_A^B d\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=m\int_A^B \mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}$$

Tengamos en cuenta que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{d}{dt}\left(v^2\right)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

De donde tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(v^2\right)=2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Rightarrow\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=\frac{d\left(v^2\right)}{2}$$

Así, sustituyendo:

$$W(A\rightarrow B)=m\int_A^B \mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}=m\int_A^B\frac{d\left(v^2\right)}{2}=m\left.\frac{v^2}{2}\right|_A^B=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

El término $\frac{1}{2}mv^2$ aparece tan a menudo en las expresiones de la Física que desde hace ya más de un siglo se consideró la conveniencia de considerarlo como una magnitud física importante, a la que se le dio el nombre de energía cinética. Dicha energía es la que posee un cuerpo en razón de su movimiento. Representaremos la energía cinética por E_C, de modo que podemos escribir:

$$W(A\rightarrow B)=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=E_{CB}-E_{CA}=\Delta E_C$$

que constituye la expresión del llamado teorema de las fuerzas vivas (o teorema del trabajo-energía cinética), que puede enunciarse de la siguiente forma: “El trabajo efectuado sobre una partícula es igual a la variación que experimenta su energía cinética”.

b) Puesto que el trabajo es la integral de la fuerza por el desplazamiento, será el área encerrada bajo la curva, y podemos dividir el área que nos interesa en suma de un triángulo (positivo) y un trapecio (negativo). Tendremos entonces:

$$W_{0\rightarrow 4}=Area_{\text{triángulo}}-Area_{\text{trapecio}}=\frac{\text{base x altura}}{2}-\frac{(\text{base mayor + base menor})\text{ x altura}}{2}=$$
$$=\frac{1\cdot 2}{2}-\frac{(3+1)\cdot 2}{2}=-3\text{ J}$$

$$\underline{W_{0\rightarrow 4}=-3\text{ J}}$$