a) En las oscilaciones libres la energía total permanece constante. Por supuesto que las oscilaciones libres no constituyen, por lo general, una situación física real, ya que normalmente existirá una disipación de energía, de modo que la energía del oscilador, y por ende la amplitud de sus oscilaciones, irán decreciendo continuamente hasta que, finalmente, cesa el movimiento. Hablamos entonces de oscilaciones amortiguadas, en contraposición a las oscilaciones libres. Tenemos una fuerza de rozamiento que será siempre opuesta a la velocidad de la partícula y en su forma más sencilla es directamente proporcional a dicha velocidad. Este es el caso que se presenta cuando un cuerpo se mueve en un medio fluido (viscoso) con velocidad moderada. Entonces escribiremos:

$$f=-\gamma v$$

donde $\gamma$ es una constante positiva denominada constante de amortiguamiento. La ecuación del movimiento nos queda:

$$\Sigma F=m\ddot{x}\Rightarrow -kx-\gamma v=m\ddot{x}$$

Ecuación que es conveniente escribir en la forma:

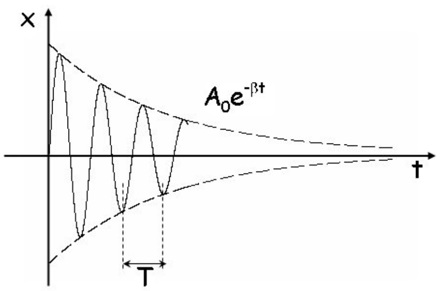
$$-kx-\gamma v=m\ddot{x}\Rightarrow m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$$

donde $\beta=\frac{\gamma}{2m}$ y $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ son, respectivamente, el parámetro de amortiguamiento y la frecuencia angular natural del oscilador.

La solución de la ecuación diferencial depende de los valores de los coeficientes $\beta$ y $\omega_0$. De acuerdo con los valores relativos de $\beta$ y $\omega_0$ hemos de distinguir tres casos:

- ✓ $\beta<\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es débil.
- ✓ $\beta=\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es crítico.
- ✓ $\beta>\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es supercrítico.

En el caso del amortiguamiento débil la solución de la ecuación diferencial del movimiento es:

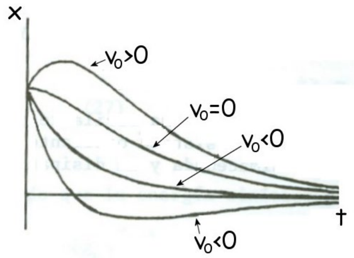



$x=A_0e^{-\beta t}\text{sen}(\omega' t+\varphi)$, donde $A_0$ y $\varphi$ son dos constantes arbitrarias que se determinaran a partir de las condiciones iniciales y $\omega'$ es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas.

La amplitud de las oscilaciones no es constante, ya que está dada por $A=A_0e^{-\beta t}$ y debido al exponente negativo, decrece a medida que transcurre el tiempo. Las curvas cuyas ecuaciones son:

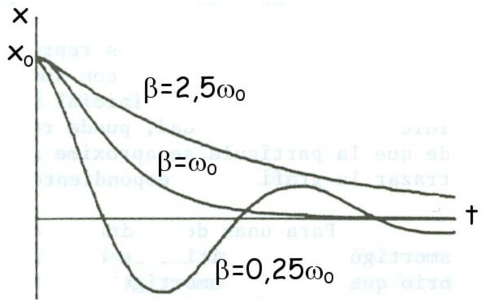
$x=\pm A_0e^{-\beta t}$

son las envolventes de las curvas x(t) en el oscilador amortiguado. En la figura mostramos estas curvas, así como las curvas de elongación.




Si el amortiguamiento del oscilador aumenta suficientemente, puede llegar a ser $\beta=\omega_0$; evidentemente, en estas condiciones no hay oscilaciones, ya que el período de las mismas sería infinito y el oscilador regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o, a lo más, rebasándola una sola vez. La condición de $\beta=\omega_0$ se conoce con el nombre de amortiguamiento crítico del oscilador; se ha alcanzado un valor crítico para el amortiguamiento en el que las oscilaciones desaparecen. Dependiendo del valor inicial de la velocidad, puede rebasarse la posición de equilibrio antes de que la partícula se aproxime asintóticamente a ella.

El sobreamortiguamiento se presenta cuando el parámetro de amortiguamiento $\beta$ es mayor que la frecuencia angular natural $\omega_0$ del oscilador. En estas condiciones es evidente que no habrá oscilaciones, y la partícula regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o rebasándola




una vez a lo sumo. Para unas condiciones iniciales dadas ($x_0$, $v_0$), cuanto mayor sea el amortiguamiento más tiempo empleará el sistema en quedar en reposo en la posición de equilibrio. En la figura hemos representado gráficamente las curvas de elongación-tiempo correspondientes a un oscilador infraamortiguado, un oscilador con amortiguamiento crítico y un oscilador sobreamortiguado, para las mismas condiciones iniciales $x_0 \neq 0$, $v_0=0$.

b) Con los datos podemos determinar la frecuencia natural de la oscilación y el parámetro de amortiguamiento:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{540}{4}}=11{,}619 \text{ rad/s}$$

$$\beta=\frac{\gamma}{2m}=\frac{10}{2\cdot 4}=1{,}25 \text{ s}^{-1}$$

Como $\beta<\omega_0$ el movimiento es subamortiguado, y la ecuación de la posición en función del tiempo es:

$$x=A_0e^{-\beta t}\text{sen}(\omega' t+\varphi)=A\text{sen}(\omega' t+\varphi)$$

siendo A la amplitud, que no es constante, sino que decrece exponencialmente con el tiempo:

$$A=A_0e^{-\beta t}$$

Al cabo de tres oscilaciones tendremos:

$$A=A_0e^{-\beta t}=A_0e^{-3\beta T'}$$

Por tanto, solo necesitamos el período. La frecuencia angular del movimiento será:

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{11{,}619^2-1{,}25^2}=11{,}552 \text{ rad/s}$$

Y por tanto el período:

$$\omega'=\frac{2\pi}{T'} \Rightarrow T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{11{,}552}=0{,}544 \text{ s}$$

Por tanto, la amplitud respecto de la inicial es:

$$A= A_0e^{-3\beta T'}=A_0e^{-3\cdot 1{,}25\cdot 0{,}544}=0{,}13A_0$$

La amplitud que nos queda al cabo de 3 oscilaciones es el 13%, luego se ha reducido en un 87%.

<u>87%</u>