a) Aprovechando la simetría, tomamos superficies gaussianas esféricas. Tendremos que:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi r^2\, E(r) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon}$$

Para r<a no se encierra carga, luego E(r<a) = 0.

Para a<r<2a, tendremos que

$$q_{enc} = \int_a^r \rho\, dv = \int_a^r \rho\, 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho}{3}(r^3 - a^3) \Rightarrow \vec{E}(a < r < 2a) = \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Entre 2a y 3a se encerrará la carga total del dieléctrico

$$q_{enc} = Q_{diel} = \frac{4\pi\rho}{3}\left((2a)^3 - a^3\right) = \frac{28\pi\rho a^3}{3} \Rightarrow \vec{E}(2a < r < 3a) = \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Entre 3a y 4a estamos dentro del conductor, luego E(3a<r<4a) = 0 (recordemos, aunque no haga falta utilizarlo, que en la superficie interior del conductor se localizará una carga -Q_{diel} para compensar el efecto coulombiano de la carga en el aislante).

Para r>4a se englobará la carga del dieléctrico más la del conductor:

$$q_{enc} = Q + Q_{diel} = Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3} \Rightarrow \vec{E}(r > 4a) = \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

donde Q_T designa la carga total del sistema.

Pasamos a evaluar los potenciales, desde el exterior hacia dentro.

Para r>4a, tomando el origen de potenciales en el infinito:

$$V(r > 4a) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Dentro del conductor el potencial se mantiene constante

$$V(3a < r < 4a) = V(r = 4a) = \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

Entre el dieléctrico y el conductor tendremos que:

$$V(2a < r < 3a) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^{3a} \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr + V(r = 3a) = \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3a}\right) + \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

En particular, en la superficie entre el dieléctrico y el vacío, el potencial será:

$$V(r = 2a) = \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}\right) + \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a} = \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0} + \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

Dentro del dieléctrico la expresión buscada es:

$$V\ (a < r < 2a) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{2a} \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon r^2} dr + \int_{2a}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^{2a} \frac{\rho r}{3\varepsilon} dr - \int_r^{2a} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon r^2} dr + V(r = 2a)$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon}(4a^2 - r^2) - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) + \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0} + \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

Y, en particular, para r=a

$$V(r = a) = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon} + \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0} + \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

Como el campo eléctrico es 0 para r<a, el potencial se mantendrá constante e igual a este último valor para dichas coordenadas

$$V(r < a) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^a 0 \cdot dr + V(r = a) = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon} + \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0} + \frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

b) Si se conecta la esfera conductora a tierra, se impone la condición al potencial $V_{conductor}$=0. Para que se verifique, deberá cambiar la carga en el conductor. La forma más sencilla de imponer la condición es tomar la expresión derivada en el apartado anterior, válida para una carga Q cualquiera en el conductor, y analizar el caso particular en que dicha carga anula el potencial, esto es:

$$Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3} = 0 \Rightarrow Q = -\frac{28\pi\rho a^3}{3}$$

Es decir, la carga en el conductor neutraliza la del dieléctrico. Esta carga, de acuerdo con lo indicado en el apartado a, se ubicará en la cara interna del conductor, mientras que en la cara externa no habrá carga.

Si nos referimos a los campos, esto no representa modificación alguna para las expresiones obtenidas para $r<a$, $a<r<2a$, $2a<r<3a$ ni $3a<r<4a$. Sin embargo, sí que cambia el campo en el exterior de la distribución, que ahora será, simplemente:

E (r>4a) = 0

Por lo que respecta a los potenciales, ahora todos ellos cambiarán de forma acorde con la modificación impuesta en el conductor. Pasemos a reescribirlos:

$$V(r > 4a) = 0$$

$$V(3a < r < 4a) = V(r = 4a) = 0$$

$$V(2a < r < 3a) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{3a} \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr + V(r = 3a) = \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3a}\right)$$

$$V(r = 2a) = \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}\right) = \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0}$$

$$V\,(a < r < 2a) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{2a} \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon r^2} dr + V(r = 2a) =$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon}(4a^2 - r^2) - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) + \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0}$$

$$V(r = a) = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon} + \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0}$$

$$V(r < a) = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{a} 0 \cdot dr + V(r = a) = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon} + \frac{7\rho a^2}{18\varepsilon_0}$$

Más brevemente, bastaría con decir que el término

$$\frac{Q + \frac{28\pi\rho a^3}{3}}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

que aparece en todas las expresiones del potencial del apartado a), aquí no está presente.