En el tema de sistemas de partículas ya habíamos obtenido que la energía cinética de un sistema de partículas era:

$$E_C=\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i'^2$$

En el caso de un sólido rígido, la energía $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i'^2$ es la energía debida a la rotación de todas las partículas en torno al centro de masas. Para la partícula i-ésima, esta energía podemos expresarla como:

$$E_{Crot}^{i}=\frac{1}{2}m_i v_i'^2=\frac{1}{2}m_i r_i'^2\omega^2$$

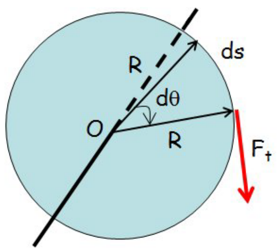
Haciendo la suma a todas las partículas:

$$E_{Crot}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i'^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i r_i'^2\omega^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i r_i'^2\omega^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i r_i'^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Así, la energía cinética nos queda:

$$E_C=\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i'^2=\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

El primer sumando corresponde a la energía cinética de traslación del centro de masas, mientras que el segundo corresponde a la energía cinética interna o de rotación de todas las partículas en torno al centro de masas.



Consideremos a continuación un sólido rígido, con movimiento exclusivamente de rotación. En el tema correspondiente a trabajo y energía vimos ya que el trabajo realizado por una fuerza puede expresarse como:

$$dW=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=F_t ds$$

Si tenemos en cuenta que el arco es igual al radio por el ángulo:

$$ds=Rd\theta$$

De modo que nos queda:

$$dW=F_t ds=F_t R d\theta$$

En esta expresión podemos ver que nos basta con una fuerza tangencial para proporcionar al sólido un movimiento de rotación. Teniendo en cuenta ahora el concepto de momento de una fuerza podemos escribir:

$$dW=F_t R d\theta=Md\theta$$

Integrando:

$$dW=Md\theta\Rightarrow W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Md\theta$$

Si el momento de las fuerzas es constante:

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Md\theta=M\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta=M\theta\Big]_{\theta_1}^{\theta_2}=M(\theta_2-\theta_1)$$

Si el momento de las fuerzas no es constante, podemos tener en cuenta la segunda ley de Newton de la rotación:

$$M=I\alpha\Rightarrow W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Md\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}I\alpha d\theta$$

Además, la aceleración angular es la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo:

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}I\alpha d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}I\frac{d\omega}{dt}d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}I\frac{d\theta}{dt}d\omega=\int_{\omega_1}^{\omega_2}I\omega d\omega=I\int_{\omega_1}^{\omega_2}\omega d\omega=I\frac{\omega^2}{2}\Big]_{\omega_1}^{\omega_2}=\frac{1}{2}I\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)$$

Y para la potencia, que es el trabajo por unidad de tiempo, tendremos:

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{Md\theta}{dt}=M\omega$$