Para analizar dinámicamente las oscilaciones amortiguadas debemos suponer que en adición a la fuerza elástica, F=-kx, actúa una fuerza de rozamiento. Aunque normalmente resulta muy complicado el análisis detallado de los efectos producidos por el rozamiento sobre el movimiento del oscilador, con frecuencia podemos representar esta fuerza mediante una relación empírica cuya expresión matemática es relativamente sencilla y que coincide razonablemente con los resultados experimentales. La fuerza de rozamiento será siempre opuesta a la velocidad de la partícula y en su forma más sencilla es directamente proporcional a dicha velocidad. Este es el caso que se presenta cuando un cuerpo se mueve en un medio fluido (viscoso) con velocidad moderada. Entonces escribiremos:

$$f=-\gamma v$$

donde γ es una constante positiva denominada constante de amortiguamiento. Evidentemente esta fuerza es no conservativa, debido a que es función de la velocidad. Además, puesto que siempre está dirigida en sentido opuesto al movimiento, el trabajo realizado por dicha fuerza es siempre negativo; se trata, pues de una fuerza disipativa.

Consideremos una masa m que se mueve bajo la acción conjunta de una fuerza restauradora lineal, F=-kx, y de una fuerza resistiva $f=-\gamma v$. Entonces, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\Sigma F = m\ddot{x} \Rightarrow -kx - \gamma v = m\ddot{x}$$

O sea:

$$-kx - \gamma v = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

Ecuación que es conveniente escribir en la forma:

$$-kx - \gamma v = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

donde $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$ y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ son, respectivamente, el parámetro de amortiguamiento y la frecuencia angular natural del oscilador, esto es, la frecuencia angular de sus oscilaciones en ausencia de amortiguamiento. La ecuación del movimiento es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea (esto es, sin segundo miembro) y de coeficientes constantes. La solución general de esta ecuación diferencial puede obtenerse mediante los métodos normales de resolución de estas ecuaciones diferenciales.

Sin entrar en el detalle de la resolución de la ecuación diferencial del movimiento, diremos que el carácter de su solución depende de los valores de los coeficientes β y ω_0. Observemos que β (parámetro de amortiguamiento) será tanto mayor cuanto mayor sea el grado de amortiguamiento. De acuerdo con los valores relativos de β y ω_0 hemos de distinguir tres casos:

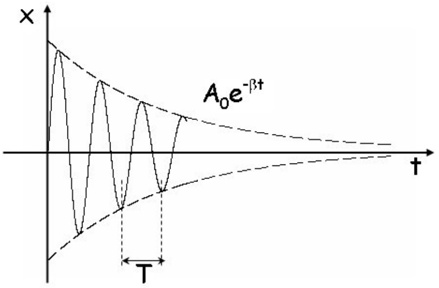
- ✓ $\beta<\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es débil.
- ✓ $\beta=\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es crítico.
- ✓ $\beta>\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es supercrítico.
- ✓

En el caso del **amortiguamiento débil** la solución de la ecuación diferencial del movimiento es:

$$x=A_0e^{-\beta t}\text{sen}(\omega' t+\varphi)$$

donde A_0 y φ son dos constantes arbitrarias que se determinaran a partir de las condiciones iniciales y ω' es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, dada por:

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$



La amplitud de las oscilaciones no es constante, ya que está dada por $A=A_0e^{-\beta t}$ y debido al exponente negativo, decrece a medida que transcurre el tiempo. Las curvas cuyas ecuaciones son:

$$x=\pm A_0e^{-\beta t}$$

son las envolventes de las curvas x(t) en el oscilador amortiguado. En la figura mostramos estas curvas, así como las curvas de elongación.