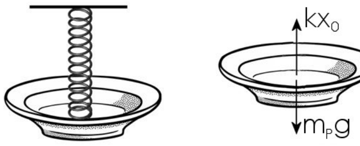


a) Tendremos lo que aparece en la figura, es decir, el plato vacío suspendido de un resorte. Sabemos que cuando solo está el plato el resorte se alarga 1 cm en la posición de equilibrio. Así, de la condición de equilibrio podemos obtener la constante de recuperación del resorte, ya que tendremos el peso, vertical y hacia abajo, y la reacción del resorte vertical y hacia arriba.

De la segunda ley de Newton:

$$kx_0-m_Pg=0 \Rightarrow 0{,}01k-0{,}2 \cdot 9{,}8=0 \Rightarrow k=196 \text{ N/m}$$

Ahora el frutero suelta 1 kg de plátanos, de manera que la masa oscilante ahora es:

$$m=m_P+m_{plátanos}=0{,}2+1=1{,}2 \text{ kg}$$

Se produce así un movimiento armónico simple de frecuencia natural:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{196}{1{,}2}}=12{,}780 \text{ rad/s}$$

Y por tanto la ecuación del movimiento será:

$$x=A_0 sen(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow v=A_0\omega_0 cos(\omega_0 t+\varphi)$$

Al añadir el kilo de plátanos la posición de equilibrio cambia, pasando a ser:

$$kx'_0-mg=0 \Rightarrow 196x'_0-1{,}2 \cdot 9{,}8=0 \Rightarrow x'_0=0{,}06 \text{ m}=6 \text{ cm}$$

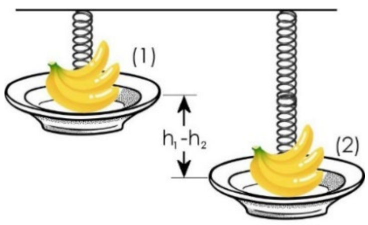
Por tanto, cuando se inicia el movimiento el sistema se encuentra 5 cm por encima de la posición de equilibrio y se parte desde el reposo. Tendremos las condiciones iniciales $t=0 \Rightarrow x=5$ cm $\Rightarrow v=0$. Aplicamos estas condiciones:

$$t=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow x=A_0 sen(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow 5=A_0 sen\varphi$$
$$t=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow v=A_0\omega_0 cos(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow 0=A_0\omega_0 cos\varphi$$

De la segunda ecuación:

$$0=A_0\omega_0 cos\varphi \Rightarrow cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=\pi/2 \Rightarrow sen\varphi=1 \Rightarrow 5=A_0 sen\varphi \Rightarrow A_0=5 \text{ cm}$$

$$\underline{A_0=5 \text{ cm}}$$



Lo podríamos haber hecho también por energías. Partimos del punto 1, en que el resorte tiene un alargamiento x_1=1 cm=0,01m y el sistema parte del reposo, y el sistema baja hasta la posición 2, donde llamamos x_2 al alargamiento del resorte y donde la velocidad será nula, puesto que es el punto de máxima elongación (amplitud). Nos quedaría lo que aparece en la figura, y aplicando el teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W_{1\to2}=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}+W_{k\Delta x}=\Delta E_C \Rightarrow mg(h_1-h_2)+\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2=0 \Rightarrow mg(x_2-x_1)+\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2=0$$

$$1{,}2 \cdot 9{,}8(x_2-0{,}01)+\frac{1}{2}196 \cdot 0{,}01^2-\frac{1}{2}196x_2^2=0 \Rightarrow 11{,}76x_2-0{,}1176+0{,}0098-98x_2^2=0$$

$$98x_2^2-11{,}76x_2+0{,}1078=0 \Rightarrow x_2=\frac{11{,}76\pm\sqrt{11{,}76^2-4 \cdot 98 \cdot 0{,}1078}}{196}=\begin{cases}0{,}01 \text{ m}=1 \text{ cm}\\0{,}11 \text{ m}=11 \text{ cm}\end{cases}$$

Desechamos la primera solución que es la misma que la de partida y por tanto x_2=11 cm, que es la elongación del resorte en la posición 2. La amplitud se mide respecto de la posición de equilibrio. Por tanto, si en la posición de equilibrio el resorte está estirado 6 cm y en la posición de máxima amplitud está alargado 11 cm la amplitud será:

$$A_0=11-6=5 \text{ cm}$$

Llegamos a la misma solución.

b) La velocidad del sistema es:

$$v=A_0\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

Puesto que el único término variable es el coseno, la velocidad será máxima cuando el término variable adquiera su valor máximo, es decir, la unidad:

$$v=v_{max} \Rightarrow \cos(\omega_0 t+\varphi)=1 \Rightarrow v_{máx}=A_0\omega_0=0,05 \cdot 12,780=0,639 \text{ m/s}$$

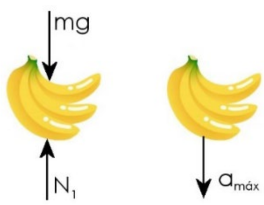
$$\underline{v_{máx}=0,639 \text{ m/s}}$$

c) En los puntos más alto y más bajo del movimiento la aceleración adquiere su valor máximo, y lo que cambia en los dos casos es el sentido de la misma. La aceleración del movimiento es:

$$a=-A_0\omega_0^2\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)$$

Igual que en el caso de la velocidad, la aceleración será máxima cuando el término variable, en este caso el seno, adquiera su valor máximo, es decir, la unidad. Tendremos entonces:

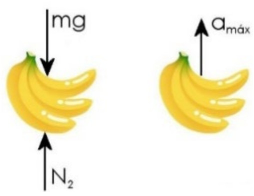
$$a=a_{máx} \Rightarrow \text{sen}(\omega_0 t+\varphi)=1 \Rightarrow a_{máx}=A_0\omega_0^2=0,05 \cdot 12,780^2=8,167 \text{ m/s}^2$$



En la parte más alta de la oscilación la aceleración será vertical y hacia abajo, de modo que si hacemos el diagrama de sólido libre de los plátanos tendremos lo que aparece en la figura. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_y=m_{plátanos}a_y \Rightarrow mg-N_1=m_{plátanos}a_{máx} \Rightarrow 1 \cdot 9,8-N_1=8,167$$

$$\underline{N_1=1,633 \text{ N}}$$

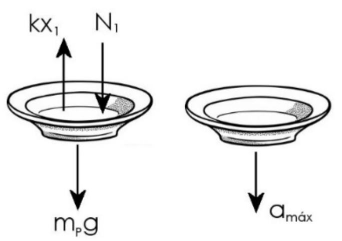


En la parte más baja de la oscilación la aceleración es igual pero de sentido contrario, es decir, hacia arriba. En este caso tendremos, operando de modo análogo:

$$\Sigma F_y=m_{plátanos}a_y \Rightarrow N_2-mg=m_{plátanos}a_{máx} \Rightarrow N_2-1 \cdot 9,8=8,167$$

$$\underline{N_2=17,967 \text{ N}}$$

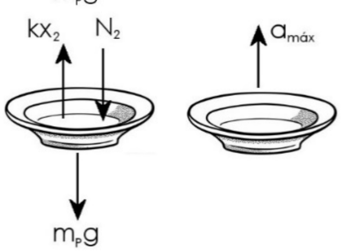
Podríamos haber utilizado también el plato, en lugar de los plátanos. En este caso aparecerá también la reacción del resorte, ya que está en contacto con el plato. En la parte más alta de la oscilación el resorte está estirado 1 cm, y en la parte más baja de la oscilación el resorte está estirado 11 cm. En cuanto a la aceleración, tendrá sentido contrario en ambos casos y será la misma que la de los plátanos, ya que se mantienen siempre en contacto (de otro modo no habría normal. En la parte más alta de la oscilación nos queda:



$$\Sigma F_y=m_P a_y \Rightarrow m_P g+N_1-kx_1=m_P a_{máx}$$

$$0,2 \cdot 9,8+N_1-196 \cdot 0,01=0,2 \cdot 8,167 \Rightarrow N_1=1,633 \text{ N}$$

Operando de igual manera pero en la parte más baja de la oscilación y a partir también de la segunda ley de Newton:



$$\Sigma F_y=m_P a_y \Rightarrow kx_2-N_2-m_P g=m_P a_{máx}$$

$$196 \cdot 0,11-N_2-0,2 \cdot 9,8=0,2 \cdot 8,167 \Rightarrow N_2=17,967 \text{ N}$$

Vemos que utilizando cualquiera de las dos partes del sistema obtenemos el mismo resultado, y que como cabe esperar, la normal es mayor en la parte más baja de la oscilación.

d) Ahora, en el punto más bajo de la oscilación, cae un plátano, de manera que la masa del sistema es ahora m'=1,2-0,1=1,1 kg. Y nos cambia de nuevo la posición de equilibrio, que ahora será:

$$m'g-kx_0=0 \Rightarrow 1{,}1 \cdot 9{,}8-196x_0=0 \Rightarrow x_0=0{,}055 \text{ m}=5{,}5 \text{ cm}$$

Y puesto que partimos del punto en que la velocidad es cero, para determinar la nueva amplitud no tendremos más que determinar la distancia desde este punto hasta la posición de equilibrio, que será:

$$A'_0=11-5{,}5=5{,}5 \text{ cm}$$

$$\underline{A'_0=5{,}5 \text{ cm}}$$