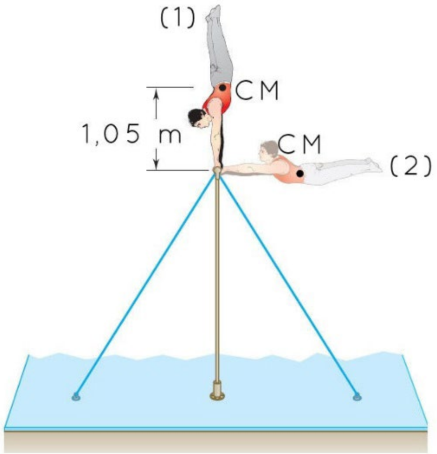
a) Para calcular la velocidad que tiene el gimnasta cuando ha rotado 90º aplicamos el teorema del trabajo y la energía cinética entre la posición inicial (1), la vertical, y la final (2), cuando ha rotado 90º. El centro de masas realiza un movimiento circular de radio 1,05 m luego su velocidad en cualquier instante será:



$$v_{CM}=\omega r=1{,}05\omega$$

Así, tendremos lo siguiente:

$$W_{12}=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}+W_F=\Delta E_C$$

donde hemos llamado F a la fuerza que soportan las manos; estas fuerzas no realizan trabajo porque no se desplazan, y en la situación (1) el gimnasta parte del reposo, luego nos queda:

$$W_{mg}+W_F=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}=\Delta E_C$$

$$mg(h_1-h_2)=\frac{1}{2}mv_{CM2}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega_2^2$$

$$mgr=\frac{1}{2}m\omega_2^2r^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega_2^2$$

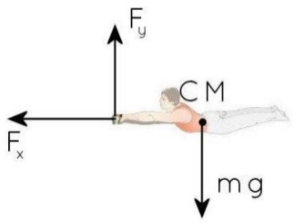
$$75\cdot 9{,}8\cdot 1{,}05=\frac{1}{2}75\cdot 1{,}05^2\omega_2^2+\frac{1}{2}15{,}1875\omega_2^2$$

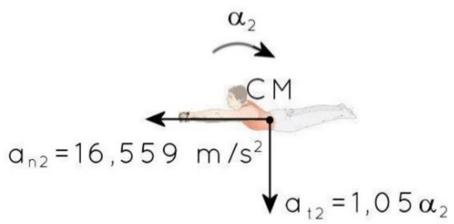
$$\underline{\omega_2=3{,}97\ \text{rad/s}}$$

Y para determinar la fuerza que ejercen las manos en la posición horizontal hacemos el diagrama de sólido libre del gimnasta. En cuanto a fuerzas, estará sometido a su peso y a la reacción de las manos (en principio con dos componentes); respecto a las aceleraciones, puesto que el centro de masa tiene movimiento circular, utilizaremos intrínsecas, y tendremos la normal (en la dirección del radio de curvatura y apuntando hacia el centro de curvatura) y la tangencial (en dirección tangente y el mismo sentido de la velocidad puesto que está acelerando). Sus módulos serán:

$$a_{n2}=\frac{v_{CM2}^2}{r}=\frac{\omega_2^2r^2}{r}=\omega_2^2r=3{,}97^2\cdot 1{,}05=16{,}559\ \text{m/s}^2$$

$$a_{t2}=\alpha_2 r=0{,}105\alpha_2$$





La aceleración angular α_2 tendrá el mismo sentido que la velocidad angular, es decir, horario. Aplicando la segunda ley de Newton a la traslación y a la rotación tendremos:

$$\Sigma F_x=ma_{CMx} \Rightarrow F_x=ma_{n2}=75\cdot 16{,}559=1241{,}90\ \text{N}$$

$$\underline{F_x=1241{,}90\ \text{N}}$$

$$\Sigma F_y=ma_{CMy} \Rightarrow F_y-mg=-ma_{t2} \Rightarrow F_y-75\cdot 9{,}8=-75\cdot 1{,}05\alpha_2 \Rightarrow F_y-735=-78{,}75\alpha_2$$

$$\Sigma M_{CM}=I_{CM}\alpha_2 \Rightarrow 1{,}05F_y=15{,}1875\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=0{,}0691F_y$$

Tenemos un Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$F_y-735=-78{,}75\alpha_2$$

$$\alpha_2=0{,}0691F_y$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

$$F_y-735=-78{,}75\alpha_2 \Rightarrow F_y-735=-78{,}75\cdot 0{,}0691F_y \Rightarrow F_y=114{,}05\ \text{N}$$

$$\underline{F_y=114{,}05\ \text{N}}$$

También puesto que el punto en que apoyan las manos es un punto fijo, podríamos haber tomado momentos respecto de ese punto y las incógnitas estarían separadas, una en cada ecuación. Si denominamos a este punto P, tendríamos que aplicar Steiner para calcular el momento de inercia respecto de P:

$$I_P=I_{CM}+md^2=15{,}1875+75 \cdot 1{,}05^2=97{,}875 \text{ kgm}^2$$

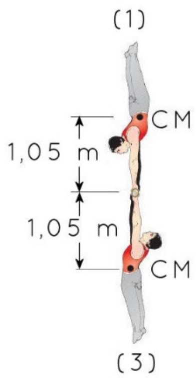
Y de la ecuación de momentos:

$$\Sigma M_P=I_P\alpha_2 \Rightarrow 1{,}05mg=I_P\alpha_2 \Rightarrow 1{,}05 \cdot 75 \cdot 9{,}8=97{,}875\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=7{,}885 \text{ rad/s}^2$$

Y de la ecuación del eje Y:

$$\Sigma F_y=ma_{CMy} \Rightarrow F_y-mg=-ma_{t2} \Rightarrow F_y-75 \cdot 9{,}8=-75 \cdot 1{,}05 \cdot 7{,}885 \Rightarrow F_y=114{,}05 \text{ N}$$

Vemos que obtenemos el mismo resultado.



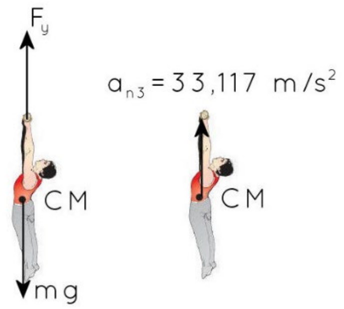
b) Operamos de igual modo en este segundo apartado. Ahora denominamos posición (3) a la posición en que el gimnasta ha girado 180º y tendremos lo que aparece en la figura. Aplicando de igual modo el teorema del trabajo y la energía cinética:

$$W_{13}=\Delta E_C \Rightarrow W_{mg}=\Delta E_C \Rightarrow mg(h_1-h_3)=\frac{1}{2}mv_{CM3}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega_3^2$$

$$mg2r=\frac{1}{2}m\omega_3^2r^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega_3^2 \Rightarrow 75 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 1{,}05=\frac{1}{2}75 \cdot 1{,}05^2\omega_3^2+\frac{1}{2}15{,}1875\omega_3^2$$

$$\underline{\omega_3=5{,}616 \text{ rad/s}}$$

Y para determinar las fuerzas hacemos el diagrama de sólido libre en la posición (3). En esta posición, puesto que el centro de masa pasa por su posición más baja la altura es mínima, luego la velocidad es máxima (conservación de la energía), y si la velocidad angular es máxima, su derivada, la aceleración angular es nula. Así, tendremos solamente aceleración normal y la reacción en las manos será solamente vertical. La aceleración normal será:



$$a_{n3}=\frac{v_{CM3}^2}{r}=\frac{\omega_3^2r^2}{r}=\omega_3^2r=5{,}616^2 \cdot 1{,}05=33{,}117 \text{ m/s}^2$$

Y aplicando la segunda ley de Newton al eje Y:

$$\Sigma F_y=ma_y \Rightarrow F_y-mg=ma_{n3} \Rightarrow F_y-75 \cdot 9{,}8=75 \cdot 33{,}117$$

$$\underline{F_y=3218{,}79 \text{ N}}$$