a) Puesto que la velocidad es:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Si queremos determinar el vector de posición a partir de la velocidad, tendremos que integrar:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow d\mathbf{r}=\mathbf{v}dt \Rightarrow \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}=\int_0^t \mathbf{v}dt$$

Y si lo que queremos es la aceleración, no tenemos más que derivar, ya que:

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Y si lo que queremos son las componentes intrínsecas, tendremos que proyectar la aceleración sobre las direcciones tangencial (dirección coincidente con la velocidad) y normal (dirección perpendicular a la tangencial y con sentido positivo hacia el centro de curvatura). Así, obtenemos dos componentes intrínsecas, la tangencial y la normal. Ambas nos dan la variación del vector velocidad en el tiempo: la componente tangencial nos da la variación del módulo de la velocidad a lo largo del tiempo (si el móvil acelera o frena) y la componente normal nos da la variación de la dirección a lo largo del tiempo (si la trayectoria no es una recta).

b) Para determinar la aceleración derivamos el vector velocidad:

$$\mathbf{v}=3t^2\mathbf{i}+(2t+5)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=6t\mathbf{i}+2\mathbf{j}$$

Ahora vamos a las componentes intrínsecas en t=1 s. La aceleración tangencial nos da la variación del módulo de la velocidad en el tiempo, luego calculamos primero el módulo de la velocidad, y después derivamos respecto del tiempo:

$$v=\sqrt{\left(3t^2\right)^2+(2t+5)^2}=\sqrt{9t^4+4t^2+20t+25}$$

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{36t^3+8t+20}{2\sqrt{9t^4+4t^2+20t+25}}=\frac{18t^3+4t+10}{\sqrt{9t^4+4t^2+20t+25}}$$

Y para t=1 s:

$$a_t=\frac{18t^3+4t+10}{\sqrt{9t^4+4t^2+20t+25}}=\frac{18+4+10}{\sqrt{9+4+20+25}}=4{,}202\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\underline{a_t=4{,}202\ \mathrm{m/s^2}}$$

Y la componente normal la podemos obtener por diferencia. Tenemos la aceleración, que para t=1 s será:

$$\mathbf{a}=6t\mathbf{i}+2\mathbf{j}=6\mathbf{i}+2\mathbf{j}$$

En módulo:

$$a=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$$

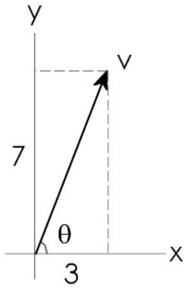
Y por diferencia:

$$a^2=a_t^2+a_n^2 \Rightarrow 40=4{,}202^2+a_n^2 \Rightarrow a_n=4{,}727\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\underline{a_n=4{,}727\ \mathrm{m/s^2}}$$

También podemos proyectar directamente la aceleración sobre las direcciones tangencial y normal. Para t=1 s la velocidad y la aceleración valen:

$$\mathbf{v}=3t^2\mathbf{i}+(2t+5)\mathbf{j}=3\mathbf{i}+7\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=6t\mathbf{i}+2\mathbf{j}=6\mathbf{i}+2\mathbf{j}$$



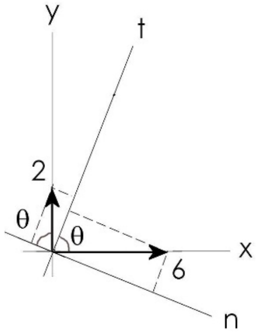
La dirección tangencial, a través de la velocidad, podemos ver que forma un ángulo θ con el eje X. Dicho ángulo vale:

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{7}{3} \Rightarrow \theta=66{,}801^\circ$$

Ahora podemos ver en el gráfico las aceleraciones tangencial y normal, que no son más que las proyecciones de la aceleración sobre las direcciones tangencial y normal, direcciones que son mutuamente perpendiculares. Nos queda pues:

$$a_t=a_x\cos\theta+a_y\mathrm{sen}\theta=6\cos 66{,}801^\circ+2\mathrm{sen}66{,}801^\circ=4{,}202\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n=a_x\mathrm{sen}\theta-a_y\cos\theta=6\mathrm{sen}66{,}801^\circ-2\cos 66{,}801^\circ=4{,}727\ \mathrm{m/s^2}$$



Vemos que se obtiene exactamente lo mismo.

Y, por último, para obtener la aceleración tangencial también podemos tener en cuenta que es la proyección de la aceleración sobre la dirección de la velocidad, es decir, podemos multiplicar escalarmente la aceleración por un vector unitario en la dirección tangencial, y tendríamos:

$$a_t=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e_t}=\mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{v}}{v}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{v}=\frac{(6\mathbf{i}+2\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+7\mathbf{j})}{\sqrt{3^2+7^2}}=4{,}202\ \mathrm{m/s^2}$$

De cualquiera de las formas llegamos al mismo resultado.