a) Definimos el centro de masas de un sistema de partículas como el punto cuyo vector de posición es:

$$\mathbf{r_{CM}}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r_i}$$

En coordenadas cartesianas la posición del centro de masas viene dada por:

$$x_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m};\quad y_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m};\quad z_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{m}$$

Al variar en el transcurso del tiempo las posiciones de las partículas que constituyen el sistema, también variará la posición del centro de masas del mismo respecto a un marco de referencia dado. Determinaremos la velocidad del centro de masas del sistema derivando respecto del tiempo la expresión de su vector de posición:

$$\mathbf{r_{CM}}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r_i}\Rightarrow\frac{d\mathbf{r_{CM}}}{dt}=\mathbf{v_{CM}}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v_i}$$

Puesto que $\mathbf{p_i}=m_i\mathbf{v_i}$ y $\mathbf{P}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p_i}$, podemos escribir:

$$\mathbf{v_{CM}}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v_i}=\frac{\mathbf{P}}{m}\Rightarrow\mathbf{P}=m\mathbf{v_{CM}}$$

de modo que la cantidad de movimiento total del sistema de partículas (**P**) es la que correspondería al caso en que toda la masa del sistema (m) estuviese concentrada en el centro de masas de este y se moviese con la velocidad de éste ($\mathbf{v_{CM}}$). Esta es la razón de que en ocasiones se llama $\mathbf{v_{CM}}$ la velocidad del sistema. Así, cuando hablamos de la velocidad de un cuerpo móvil, compuesto por muchas partículas, como puede ser la Tierra, un automóvil, una molécula…, nos referimos en realidad a la velocidad de su centro de masas.

En el caso de un sistema de partículas sometido a una fuerza resultante externa no nula, podemos determinar la aceleración del centro de masas derivando la expresión del momento lineal con respecto al tiempo:

$$\mathbf{P}=m\mathbf{v_{CM}}\Rightarrow\frac{d\mathbf{P}}{dt}=m\frac{d\mathbf{v_{CM}}}{dt}=m\mathbf{a_{CM}}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F_i}=\mathbf{F}\Rightarrow\mathbf{F}=m\mathbf{a_{CM}}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación del movimiento de una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza externa **F**. en definitiva, podemos interpretar esta expresión del siguiente modo:

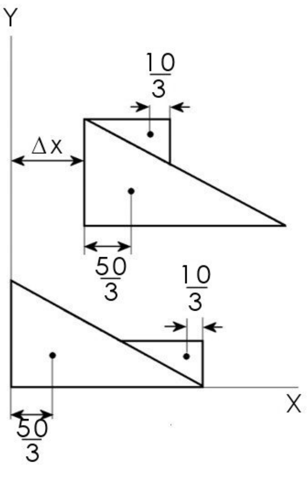
El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como una sola partícula, cuya masa fuese la masa total del sistema, sometida a una fuerza igual a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

b) Si consideramos el sistema de las dos partículas, todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son verticales (pesos y normales). Puesto que no hay fuerzas horizontales ($\Sigma F_X=0$) la componente horizontal del centro de masas debe ser nula:

$$\Sigma F_X=0\Rightarrow\Sigma F_X=ma_{CMX}\Rightarrow ma_{CMX}=0\Rightarrow a_{CMX}=0$$

Esto implica que la velocidad del centro de masas en el eje X debe ser constante:

$$a_{CMX}=0\Rightarrow v_{CMX}=cte$$



Inicialmente el sistema está en reposo, $v_{GX}=0$, luego tiene que seguir estándolo. Esto quiere decir que en el momento en que una parte del sistema se desplace hacia la derecha, el resto lo hace hacia la izquierda para que la velocidad del centro de masas sea cero. Así, al caer el prisma pequeño se desplaza hacia la derecha, luego el grande lo hace hacia la izquierda. Este retroceso es el que nos piden.

Como la velocidad del centro de masas en el eje X es cero, esto significa que la posición del centro de masas se mantiene constante:

$$v_{CMX}=0\Rightarrow x_{CM}=cte$$

Podemos determinar la posición inicial del centro de masas, la final, e igualarlas. Vemos las dos posiciones en el gráfico, donde hemos colocado los centros de masa de cada uno de los triángulos a un tercio de las bases. Denominamos Δx al retroceso del prisma inferior y llamaremos con el subíndice 1 al prisma grande y con el subíndice 2 al pequeño. Así, inicialmente tenemos:

$$x_{CM}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{10\left(\Delta x+\frac{50}{3}\right)+1\left(\Delta x+\frac{2\cdot 10}{3}\right)}{11}$$

Y cuando el prisma superior ha llegado a la posición más baja tendremos:

$$x_{CM}=\frac{m_1 x'_1+m_2 x'_2}{m_1+m_2}=\frac{10\frac{50}{3}+1\left(50-\frac{10}{3}\right)}{11}$$

Igualando las dos posiciones:

$$\frac{10\left(\Delta x+\frac{50}{3}\right)+1\left(\Delta x+\frac{2\cdot 10}{3}\right)}{11}=\frac{10\frac{50}{3}+\left(50-\frac{10}{3}\right)}{11}\Rightarrow 10\left(\Delta x+\frac{50}{3}\right)+1\left(\Delta x+\frac{2\cdot 10}{3}\right)=10\frac{50}{3}+1\left(50-\frac{10}{3}\right)$$

$$10\Delta x+\frac{10\cdot 50}{3}+\Delta x+\frac{2\cdot 10}{3}=10\frac{50}{3}+50-\frac{10}{3}\Rightarrow 11\Delta x=40 \Rightarrow \Delta x=3{,}636\text{ cm}$$

$\underline{\Delta x=3{,}636\text{ cm}}$