a) Un sólido rígido no es más que un sistema de partículas. Al calcular el momento angular de un sistema de partículas tenemos que puesto que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es la misma para todas las partículas, el momento angular del sólido será:

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L_i}=\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2\omega=\left(\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2\right)\boldsymbol{\omega}=I\boldsymbol{\omega}$$

Vemos que el término $\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m_i r_i^2}$ es una propiedad del sólido, que designamos por I y recibe el nombre de momento de inercia:

$$I=\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^2$$

De la definición del momento de inercia tenemos que esta nueva magnitud tiene las siguientes propiedades:

- Es una magnitud escalar.
- Depende de la distribución de masa (no es lo mismo en una placa que en un cilindro).
- Va a jugar el mismo papel en la rotación que la masa en el movimiento de traslación.
- Depende del eje de rotación (no es lo mismo el momento de inercia de un disco respecto de un eje transversal al mismo que respecto de un eje longitudinal).
- En el Sistema Internacional su unidad es el kgm^2.

ai) Dado un eje que pasa por el centro de masas de un sólido y dado un segundo eje paralelo al primero, el momento de inercia de ambos ejes está relacionado mediante la expresión:

$$I_P=I_{CM}+md^2$$

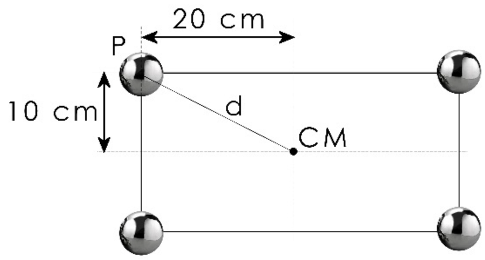
siendo d la distancia entre ambos ejes. Evidentemente, se aplica para calcular el momento de inercia de un sólido respecto de un eje paralelo al que pasa por el centro de masas.

aii) El momento de inercia presenta distintas expresiones en función de la forma (distribución de masa) del cuerpo. No obstante, siempre es posible expresar el momento de inercia de cualquier cuerpo como:

$$I=mk^2$$

siendo k el denominado radio de giro del sólido rígido correspondiente respecto a dicho eje. El radio de giro representa, por tanto, la distancia a la que habría que concentrar toda la masa del cuerpo de forma que el momento de inercia respecto del giro se mantuviera invariable. Se tiene entonces que:

$$I=mk^2 \Rightarrow k=\sqrt{\frac{I}{m}}$$



b) Tenemos dos ejes paralelos, uno que pasa por el centro de masas, y otro que pasa por una de las partículas. Evidentemente el centro de masas por simetría estará en el centro del rectángulo. La distancia d entre estos dos ejes es:

$$d=\sqrt{0{,}2^2+0{,}1^2}=\sqrt{0{,}05}=0{,}22361\text{ m}$$

Así, el momento de inercia respecto del eje que pasa por el centro de masas será:

$$I_{CM}=4mr^2=4md^2=4\cdot 0{,}01\cdot 0{,}05=2\cdot 10^{-3}\text{ kgm}^2$$

Y el momento de inercia respecto del eje que pasa por P:

$$I_P=I_{CM}+md^2=2\cdot 10^{-3}+4\cdot 0{,}01\cdot 0{,}05=4\cdot 10^{-3}\text{ kgm}^2$$

$$\underline{I_P=4\cdot 10^{-3}\text{ kgm}^2}$$