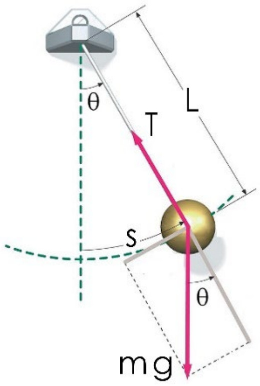

a) El péndulo simple o péndulo matemático es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa m que está suspendida de un punto fijo O mediante un hilo inextensible y sin peso. Consideremos un péndulo simple, como el representado en la figura. Si la partícula se desplaza desde la posición central de equilibrio hasta la posición marcada, de modo que la cuerda forma un ángulo θ con la vertical, y luego se abandona, el péndulo oscilará en un plano vertical bajo la acción de la gravedad. Las oscilaciones tendrán lugar entre dos posiciones extremas, simétricas respecto de la vertical, a lo largo de un arco de circunferencia. El movimiento es periódico, pero no podemos asegurar que sea armónico.

Para determinar la naturaleza de las oscilaciones deberemos escribir la ecuación del movimiento de la partícula. La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo la acción de dos fuerzas: su peso y la tensión en la cuerda. Aplicamos la segunda ley de Newton a la dirección tangencial:

$$\Sigma F_t = ma_t \Rightarrow -mg\,\text{sen}\theta = ma_t \Rightarrow -g\,\text{sen}\theta = a_t$$

Puesto que el movimiento de la partícula es circular podemos escribir:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L\dot{\theta}\right) = L\ddot{\theta}$$

Así, nos queda:

$$a_t = -g\,\text{sen}\theta \Rightarrow L\ddot{\theta} = -g\,\text{sen}\theta \Rightarrow L\ddot{\theta} + g\,\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0$$

Esta ecuación diferencial no es del mismo tipo que la correspondiente a un M.A.S., debido a la presencia de la función seno, de modo que podemos asegurar que el movimiento del péndulo simple no es armónico simple en general. Sin embargo, si consideramos sólo oscilaciones de pequeña amplitud, entonces el valor del senθ será muy próximo al valor de θ expresado en radianes y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

que es idéntica a la ecuación del M.A.S., refiriéndonos ahora al movimiento angular en vez de al movimiento rectilíneo. La solución de la ecuación diferencial es:

$\theta = \theta_0 \text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

Con:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde θ_0 y φ son constantes arbitrarias correspondientes a la amplitud angular y constante de fase del movimiento. Obsérvese que el período del péndulo simple es independiente de la masa de la partícula suspendida y, también, de la amplitud de las oscilaciones, siempre que estas sean suficientemente pequeñas como para realizar la aproximación $\text{sen}\theta \approx \theta$.

b) Podemos ver que el período de las oscilaciones es la suma de dos semiperiodos, uno el de un péndulo de longitud L_1=4 m y otro de longitud L_2=4-2,6=1,4 m, ya que la mitad de la oscilación se hace con la longitud L_1 y la otra mitad con la longitud L_2. Así pues, el período de ese movimiento es:

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}}{2} + \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}}{2} = \pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} + \pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4}{9{,}8}} + \pi\sqrt{\frac{1{,}4}{9{,}8}} = 3{,}195 \text{ s}$$

<u>T=3,195 s</u>