a) Un sistema muelle-masa que realiza un MAS es un sistema con todas las fuerzas conservativas, de manera que la energía total de la partícula es una constante del movimiento. Teniendo en cuenta las ecuaciones de la posición y velocidad tenemos:

$$x=A_0 sen(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=A_0\omega_0 \cos(\omega_0 t+\varphi)$$

Así, la energía total será:

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}kA_0^2 sen^2(\omega_0 t+\varphi)$$

Si además tenemos en cuenta que:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k=m\omega_0^2$$

Llegamos a:

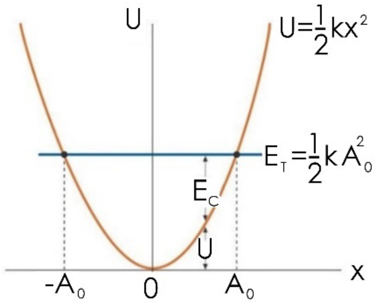
$$E_m=\frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}kA_0^2 sen^2(\omega_0 t+\varphi)=\frac{1}{2}kA_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}kA_0^2 sen^2(\omega_0 t+\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2}kA_0^2\left[\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+sen^2(\omega_0 t+\varphi)\right]=\frac{1}{2}kA_0^2$$

La energía mecánica del sistema depende de la constante elástica k del muelle y de la amplitud de las oscilaciones, y es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud.

Ahora dibujamos la curva de potencial. La energía potencial vale:

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$



Tenemos una ecuación de segundo grado, luego su representación será una parábola con la concavidad hacia arriba (signo positivo del coeficiente de x^2) y con el vértice en el origen (no existen ni el término en x ni el término independiente). En cuanto a la energía total, E_T, puesto que es constante, en la gráfica aparecerá como una horizontal. Se comprueba entonces que el movimiento de la partícula queda restringido al intervalo $-A_0 \leq x \leq A_0$, ya que los puntos $x=-A_0$ y $x=A_0$, que corresponden con los puntos de corte de la energía mecánica total con la curva U(x), son puntos de retorno. Fuera del intervalo anteriormente citado la energía potencial superaría la energía total, de modo que la energía cinética sería negativa, cosa imposible pues implicaría una velocidad imaginaria. El movimiento tiene lugar en un pozo de potencial, cuyo fondo corresponde a la posición de equilibrio estable.

Si trazamos una recta vertical para cualquier x interior al intervalo $(-A_0, A_0)$, la longitud del segmento de dicha recta comprendido entre el eje de abscisas y la parábola representa la energía potencial correspondiente a ese valor de la elongación; y la longitud del segmento comprendido entre la parábola y la recta horizontal de energía total constante corresponde a la energía cinética. Conforme la partícula se mueve, entre los límites $-A_0$ y A_0, hay un intercambio continuo de energía cinética a potencial y viceversa. Cuando la partícula se aleja de la posición de equilibrio (x=0) aumenta la energía potencial a expensas de la energía cinética; ocurre lo contrario cuando la partícula se aproxima a la posición de equilibrio. En los puntos de retorno toda la energía es potencial, mientras que en la posición de equilibrio toda la energía es cinética. La velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio toma su valor máximo, mientras que en los extremos es la elongación la que tiene el valor máximo.

b) Puesto que tenemos las energías cinética y potencial tenemos la total como suma de ambas:

$$E_T=E_C+U=0{,}8+0{,}2=1\ J$$

A partir de la frecuencia podemos determinar la frecuencia natural de la oscilación:

$$\omega_0=2\pi\nu=2\pi\frac{5}{\pi}=10\ rad/s$$

Y con esto tenemos también la constante del resorte:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow 10=\sqrt{\frac{k}{0,5}} \Rightarrow k=50 \text{ N/m}$$

Por tanto, la posición inicial la podemos determinar de la energía potencial inicial:

$$U=\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow 0,8=\frac{1}{2}50x^2 \Rightarrow x=0,179 \text{ m}$$

$\underline{x=0,179 \text{ m}}$

La velocidad inicial la podemos determinar de la energía cinética inicial:

$$E_C=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 0,2=\frac{1}{2}0,5v^2 \Rightarrow v=0,894 \text{ m/s}$$

$\underline{v=0,894 \text{ m/s}}$

En el punto en que el desplazamiento es máximo (amplitud) la energía es solo potencial, es decir, coincide con la total:

$$U=\frac{1}{2}kA_0^2 \Rightarrow 1=\frac{1}{2}50A_0^2 \Rightarrow A_0=0,2 \text{ m}$$

$\underline{A_0=0,2 \text{ m}}$

La velocidad máxima será:

$$v_{máx}=A_0\omega_0=0,2 \cdot 10=2 \text{ m/s}$$

$\underline{v_{máx}=2 \text{ m/s}}$

Por último, si las energías cinética y potencial son iguales ambas serán de 0,5 J, de modo que de la potencial:

$$U=\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow 0,5=\frac{1}{2}50x^2 \Rightarrow x=0,141 \text{ m}$$

$\underline{x=0,141 \text{ m}}$