

a) Para un sólido rígido, puesto que la velocidad angular de todas las partículas que la componen es la misma, podemos escribir el momento angular como:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \vec{\omega} = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

El término $\sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ es una propiedad del sólido que designamos por I y recibe el nombre de momento de inercia:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

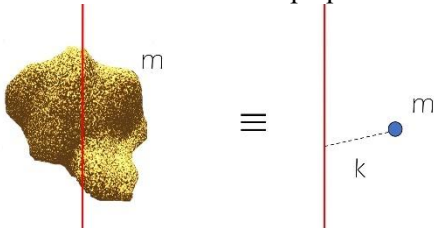
De la definición del momento de inercia tenemos que esta nueva magnitud tiene las siguientes propiedades:

- Es una magnitud escalar.
- Depende de la distribución de masa (no es lo mismo en una placa que en un cilindro).
- Va a jugar el mismo papel en la rotación que la masa en el movimiento de traslación.
- Depende del eje de rotación (no es lo mismo el momento de inercia de un disco respecto de un eje transversal al mismo que respecto de un eje longitudinal).
- En el Sistema Internacional su unidad es el kgm^2 .

Existe una relación entre los momentos de inercia de un sólido con respecto a dos ejes paralelos, uno de los cuales pasa por el centro de masas: es el denominado teorema de Steiner. Según este teorema:

$$I_P = I_{CM} + md^2$$

El teorema de Steiner dice que el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia del mismo cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior que pase por el centro de masas, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes. Esta ecuación nos muestra que, de todos los ejes paralelos a una dirección dada, el que pasa por el centro de masas del cuerpo es al que le corresponde el momento de inercia más pequeño.



El momento de inercia presenta distintas expresiones en función de la forma (distribución de masa) del cuerpo. No obstante, siempre es posible expresar el momento de inercia de cualquier cuerpo como:

$$I = mk^2$$

siendo k el denominado radio de giro del sólido rígido correspondiente respecto a dicho eje. El radio de giro representa, por tanto, la distancia a la que habría que concentrar toda la masa del cuerpo de forma que el momento de inercia respecto del giro se mantuviera invariable. Se tiene entonces que:

$$I = mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

b) Para calcular el momento de inercia respecto del eje que está a una distancia $R/2$ del centro del disco aplicamos el teorema de Steiner, y tendremos:

$$I_P = I_{CM} + md^2 = \frac{1}{2} MR^2 + M \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{4} MR^2 = \frac{3}{4} MR^2$$

$$I_P = \frac{3}{4} MR^2$$

Para el radio de giro en el caso del momento de inercia respecto del centro del disco:

$$k_{CM} = \sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} = \sqrt{\frac{MR^2}{2M}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$k = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Y en el caso del otro eje:

$$k_P = \sqrt{\frac{I_P}{M}} = \sqrt{\frac{3MR^2}{4M}} = \frac{\sqrt{3}R}{2}$$

$$k = \frac{\sqrt{3}R}{2}$$